基础拓扑学导引

李进金　李克典　林　寿　编著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

拓扑学是数学的重要分支，内容丰富且研究途径众多，不少初学者视其为畏途. 本书以点集拓扑学为基础，通过对一般拓扑学、拓扑动力系统、代数拓扑学、微分拓扑学中的一些专题论述，向读者简要介绍拓扑学中的一些基本知识、研究思想以及解决问题的方法，以较少的篇幅展现拓扑学中的一些精彩画卷. 本书主要内容包括：集合与序集、拓扑空间、几类重要的拓扑性质、紧空间与度量空间、离散拓扑动力系统、基本群及其应用、流形的嵌入.

本书可以作为数学类专业拓扑学课程的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

基础拓扑学导引/李进金，李克典，林寿编著. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-023674-6

I. 基… II. ①李… ②李… ③林… III. IV.

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 000000 号

责任编辑：王丽平 房 阳／责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)

2009 年 5 月第一次印刷 印张：15 1/4

印数：1—2 500 字数：000 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

前　言

“拓扑学”作为数学类专业的一门主干课程在国内各高校已普遍开设. 在内容丰富的拓扑之林选取适当的素材是编写教材的重要环节. 点集拓扑学对于任何一位希望了解拓扑学知识的人都是必备的, 它是进入一般拓扑学、代数拓扑学、拓扑动力系统、微分拓扑学、几何拓扑学或维数论等研究方向的基础.

作为一门导引式的课程, 作者希望在较少的时间内向读者介绍拓扑学的一些精彩内容, 以此窥视该学科的动人与美妙之处. 本书由两部分组成, 第一部分包含第 1～ 3 章, 为点集拓扑学必备知识; 第二部分包含第 4 ～ 7 章, 介绍拓扑学四个分支方向的简要知识. 作者力图在强调基础的同时, 以简短的篇幅向读者展示拓扑学一些分支的研究思想以及解决问题的手段, 所以在介绍点集拓扑学基本概念的基础上, 精选了一般拓扑学、拓扑动力系统、代数拓扑学、微分拓扑学中一些专题进行论述, 同时注重不同分支之间的内在联系. 本书的知识在相关的参考书或文献中都有不同程度的描述, 作者的作用只是在内容的选取和表述上. 只要读者学习过“数学分析”和“高等代数”等课程, 并对集合论中最基本的内容有所了解, 就可掌握本书中的知识 (其中阅读第 5 、 6 章分别要学习过“实变函数论”、“近世代数”课程). 作者为选读本书提供了多种组合, 如在第一部分的基础上, 可以选学第二部分的任一章.

李进金、李克典、林寿分别负责编写本书的第 1 章、第 2 ～ 4 章、第 5 ～ 7 章, 全书由林寿统一整理. 大部分书稿曾在漳州师范学院数学与信息科学系的 2004 ～ 2008 级研究生中讲授过. 苏州大学恽自求教授、华侨大学陈尔明教授分别审阅了书稿的第 1 ～ 4 章、第 5 和第 6 章, 提出了宝贵的建议, 指出了原稿中的多处疏漏与失当. 在书稿的编写过程中, 作者们的研究工作得到国家自然科学基金 (项目编号: 10571151, 10671173) 的资助. 书稿的写作与出版始终得到漳州师范学院研究生处的支持, 初稿的编辑和排版得到漳州师范学院拓扑学专业研究生的帮助, 其中郑春燕同学绘制了全书的插图. 本书的出版还要特别感谢漳州师范学院重点学科教材建设资助项目的资助.

拓扑学博大精深, 作者学识粗浅, 本书定有不少不足之处, 望同行和读者批评、指正 (可来函或发 E-mail 至 linshou@public.ndptt.fj.cn).

作　者

2009 年 1 月

于漳州师范学院数学与信息科学系

目　录

第 1 章　集合与序集

拓扑学中最基本的内容是点集拓扑学. 点集拓扑学主要建立在集合论的基础上, 所以关于集合论的知识对于学好、学深点集拓扑学及相关的集合论拓扑学是至关重要的. 本书的目的是介绍拓扑学的一些基本知识, 相信读者对集合的概念及相关的集的运算、关系、函数等内容已有一定的认识. 本章着眼于回忆朴素集合论的一些基本知识, 介绍集族、笛卡儿积集、序集等概念, 引用选择公理等相关的等价命题. 希望对公理集合论的基础知识有较好理解的读者可阅读 H. B. Enderton 的 *Elements of Set Theory*[1].

1.1　集合、函数

本节由三部分组成, 分别介绍集合、函数和集族等基本概念.

本书所提到的集合是描述性的定义, 即具有某种共同特点的对象的总体称为集合. 如果 a 是集合 A 的元素, 则称为 a 属于 A, 记为 $a \in A$; 如果 a 不是集合 A 的元素, 则称为 a 不属于 A, 记为 $a \notin A$. 没有元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$.

符号 "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$" 分别表示命题的 "蕴含" 与 "当且仅当".

设 A 和 B 是两个集合. 如果 $x \in A$, 则 $x \in B$, 那么称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$; 否则称 A 不是 B 的子集, 记为 $A \not\subset B$. 如果 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$; 否则称 A 与 B 不相等, 记为 $A \neq B$. 如果 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集. 因此, $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $A \supset B$.

在本书中, 分别用 $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}_+$ 表示实数集、有理数集、整数集、自然数集和正整数集.

下面简述集合的运算. 设 A 和 B 是两个集合, 集合 $\{x : x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的*并集*或*并*, 记为 $A \cup B$; 集合 $\{x : x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的*交集*或*交*, 记为 $A \cap B$; 集合 $\{x : x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为 A 与 B 的*差集*, 记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$; 如果 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B 无交或不相交; 反之, 若 $A \cap B \neq \varnothing$, 则称 A 与 B 有 (非空的) 交或相交.

对于集合的运算法则, 有幂等律、交换律、结合律、分配律等, 特别地有 de Morgan *公式*: 设 A, B, C 都是集合, 则

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

设 A 和 B 是两个集合, 集合

$$\{(a,b):a\in A \text{ 且 } b\in B\}$$

称为 A 和 B 的**笛卡儿积**, 记为 $A\times B$, 其中 (a,b) 是有序对. $a\in A$ 与 $b\in B$ 分别称为 (a,b) 的第一和第二个坐标.

本节的第二部分内容涉及函数. 在微积分学中通过对应建立的关于实数子集之间的函数定义仍适用于集合之间的函数概念. 通过笛卡儿积的子集可给函数以更一般的定义.

设 A, B 是两个集合, f 是笛卡儿积 $A\times B$ 的子集. 如果对每个 $x\in A$, 存在唯一的 $y\in B$ 使得 $(x,y)\in f$, 则称 f 是从 A 到 B 的**函数**或**映射**, 记为 $f:A\to B$. 这里 A 称为函数 f 的**定义域**, 即

$$A=\{x:\ \text{存在 } y\in B,\ \text{使 } (x,y)\in f\},$$

满足 $(x,y)\in f$ 的 B 中唯一的 y 称为函数 f 在 x 的值, 或 x 在 f 下的像, 记为 $f(x)$, 即 $y=f(x)$.

对 $A_0\subset A$, 记

$$f(A_0)=\{b\in B:\ \text{对某个 } a\in A_0,\ b=f(a)\},$$

称为 A_0 在 f 下的像; $f(A)$ 称为 f 的**值域**, 为了方便起见, 也常称集合 B 为 f 的值域或**取值范围**.

对 $B_0\subset B$, 记

$$f^{-1}(B_0)=\{a\in A:f(a)\in B_0\},$$

称为 B_0 在 f 下的**原像**或**逆像**. 当 B_0 是单点集 $\{y_0\}$ 时, 常记 $f^{-1}(B_0)=f^{-1}(y_0)$, 称为 f 在 y_0 的**纤维**.

对 $A_0\subset A$, $B_0\subset B$, 则

$$f^{-1}(f(A_0))\supset A_0,\quad f(f^{-1}(B_0))\subset B_0.$$

注意, 等式 $f^{-1}(f(A_0))=A_0$, $f(f^{-1}(B_0))=B_0$ 未必成立.

引理 1.1.1 设函数 $f:A\to B$. 若 U, F 分别是 A, B 的子集, 则

$$f^{-1}(F)\subset U\Leftrightarrow F\subset B-f(A-U).$$

证明 设 $f^{-1}(F)\subset U$. 对任意 $y\in F$, 有 $f^{-1}(y)\subset U$. 因而 $f^{-1}(y)\cap(A-U)=\varnothing$. 于是 $y\in B-f(A-U)$, 故 $F\subset B-f(A-U)$. 反之, 设 $F\subset B-f(A-U)$. 由于

$A-U\subset f^{-1}(f(A-U))$, 所以 $f^{-1}(F)\subset f^{-1}(B-f(A-U))=A-f^{-1}(f(A-U))\subset A-(A-U)=U$. □

下面介绍由已知函数作出新函数的方法.

设函数 $f:A\to B$, $A_0\subset A$. 笛卡儿积 $A_0\times B$ 的子集

$$\{(a,f(a)):a\in A_0\}$$

称为 f 在 A_0 上的**限制**, 它是 A_0 到 B 的函数, 记为 $f|_{A_0}$. 对每个 $x\in A_0$, 有 $f|_{A_0}(x)=f(x)$. 从而 $f|_{A_0}(A_0)=f(A_0)$. 对 $B_0\subset B$, 有

$$f|_{A_0}^{-1}(B_0)=A_0\cap f^{-1}(B_0).$$

设 $A_0\subset A$, 函数 $f:A_0\to B$. 如果存在映射 $F:A\to B$ 使得 $F|_{A_0}=f$, 则称 F 是 f 到 A 上的**扩张映射**, 简称**扩张**. 此时, f 是 F 在 A_0 上的**限制**.

设函数 $f:A\to B$, $g:B\to C$. 笛卡儿积 $A\times C$ 的子集

$$\{(a,c):\text{ 存在 } b\in B,\text{ 有 } f(a)=b,\ g(b)=c\}$$

称为 f 与 g 的复合函数, 记为 $g\circ f:A\to C$. 对每个 $a\in A$, $(g\circ f)(a)=g(f(a))$.

设函数 $f:A\to B$. 如果 $f(A)$ 是单点集, 则称 f 为**常值函数**; 如果对任意 $a_1,a_2\in A$ 且 $a_1\neq a_2$, 有 $f(a_1)\neq f(a_2)$, 则称 f 为**单的**或**单射**; 如果 $f(A)=B$, 则称 f 为**满的**或**满射**; 如果函数 f 既是单的又是满的, 则称 f 为**双射**或**一一映射**.

易证, 函数 f 是单的 $\Leftrightarrow$ 如果对 $a_1,a_2\in A$, 有 $f(a_1)=f(a_2)$, 则 $a_1=a_2\Leftrightarrow$ 对任意 $b\in B$, $f^{-1}(b)$ 或为空集或为单点集. 函数 f 是满的 $\Leftrightarrow$ 对任意 $b\in B$, $f^{-1}(b)$ 不空.

如果集合 $A\subset B$, 函数 $f:A\to B$ 定义为对任意 $x\in A$, $f(x)=x$, 则称 f 为**内射**, 常用 j_A 或 j 表示; 当 $A=B$ 时内射称为**恒等函数**, 常用 i_A 或 i 表示.

如果函数 $f:A\to B$ 是双射, 则必存在唯一一个从 B 到 A 的函数, 记为 f^{-1}, 满足对每一 $b\in B$, 有 $f(f^{-1}(b))=b$, 称 $f^{-1}:B\to A$ 为 f 的**逆函数**或**反函数**. 这时, $f^{-1}:B\to A$ 也是双射且有函数复合关系 $f^{-1}\circ f=i_A$, $f\circ f^{-1}=i_B$.

下面的引理是用来判定函数是双射的一种常用的方法, 证明留作习题.

引理 1.1.2　设函数 $f:A\to B$. 如果存在函数 $g:B\to A$ 和 $h:B\to A$, 满足 $g\circ f=i_A$, $f\circ h=i_B$, 则函数 f, g, h 都是双射, $f^{-1}=g=h$, 且 $g^{-1}=f$.

如果函数 f 是双射, $B_0\subset B$, 则 $f^{-1}(B_0)$ 既可以表示 B_0 在 f 下的原像, 又可表示 B_0 在 $f^{-1}:B\to A$ 下的像. 它们表示的是 A 的同一个子集.

通过双射可定义有限集和无限集.

定义 1.1.1　设 X 是一个集合. 如果 X 是空集或存在 $n\in\mathbb{Z}_+$ 使得 X 和集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 之间有一个双射, 则称 X 是**有限集**或者 **n 元集** (空集可称为 0 元集);

不是有限集的集合称为无限集; 如果存在从 X 到 $\mathbb{Z}_+$ 的单射 (双射), 则称 X 是可数集 (可数无限集); 不是可数集的集合称为不可数集.

对 n 元集 $(n \in \mathbb{Z}_+)$ 或者可数无限集, 设定义中的双射为 f, 并且记 $a_i = f(i)$, 则 n 元集与可数无限集合可以分别表示成

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \text{ 或 } \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$

其中, 当正整数 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$.

显然, 有限集是可数集. 易验证, 可数集的子集是可数集, 可数集的映像是可数集. 关于无限集的一些命题留给读者作为习题.

当集合 A 是 n 元集时, 则称 n 是有限集 A 的基数, 记为 $|A|$, 即 $|A| = n$. 如果 A, B 都是有限集, 则 $|A| = |B|$ 当且仅当 A 与 B 之间存在双射. 这一概念也适用于一般的集合. 对集合 X, 定义 X 的基数 $|X|$, 使对每个集合 Y, $|X| = |Y|$ 当且仅当 X 与 Y 之间存在双射. 有限集 (无限集) 的基数称为有限基数 (无限基数). 集合 $\mathbb{Z}_+$ 的基数记为 $\aleph_0$, 即 $|\mathbb{Z}_+| = \aleph_0$. 从而, 可数无限集的基数是 $\aleph_0$. 一个集合是可数集当且仅当它的基数是有限基数或 $\aleph_0$. 集合 $\mathbb{R}$ 是不可数集 (见习题 1.1.5), 它的基数称为连续统基数, 记为 $\mathbf{c}$, 即 $|\mathbb{R}| = \mathbf{c}$.

本节的第三部分内容介绍集族的概念. 集合的元素是各式各样的, 有时候需要讨论以集合为元素的集合.

以集合为元素的集合称为集族, 用花写字母 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 等表示. 这种记法在于便于区分元素的集合及元素的集合的族.

如 $\mathscr{A} = \{\{a\}, \{a, b\}, \varnothing\}$ 是一个集族, 它有元素 $\{a\}, \{a, b\}$, $\varnothing$. 而 $b \in \{a, b\} \in \mathscr{A}$, 但 $b \notin \mathscr{A}$. 集族 $\{\varnothing\}$ 与空集 $\varnothing$ 不同, $\{\varnothing\} \subset \mathscr{A}$, 而 $\varnothing \in \mathscr{A}$.

设 A 是一个集合, A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集. 它是集族, 记为 $\mathscr{P}(A)$, 即 $\mathscr{P}(A) = \{B : B \subset A\}$.

如 $A = \{1, 2, 3\}$, 则

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\},\ A\}.$$

注意, 作为集合 A 的元素 1, 与作为 A 的子集 $\{1\}$ 是不同的. $1 \in A$, $\{1\} \subset A$, $\{1\} \in \mathscr{P}(A)$, 而 $\{1\} \notin A$, $\{1\} \not\subset \mathscr{P}(A)$.

把两个集合的并与交的定义, 推广到任意个集合的并与交.

设 $\mathscr{A}$ 是一个集族. 定义

$$\cup\mathscr{A} = \{x : \text{ 存在 } A \in \mathscr{A}, \text{ 使得 } x \in A\},$$

称为集族 $\mathscr{A}$ 的并; 类似地, 非空集族 $\mathscr{A}$ 的交定义为

$$\cap\mathscr{A} = \{x : \text{ 对任意 } A \in \mathscr{A},\ x \in A\}.$$

需要注意的是, 当 $\mathscr{A}$ 为空集族时, 按照定义有 $\cup\mathscr{A}=\varnothing$. 本书不讨论空集族的交集, 当说到有限个集的交时也自动排除 0 个集的交集.

集族的表示常利用指标集.

设 J 是一个集合, $\mathscr{A}$ 是非空集族, 满函数 $\varphi: J\to\mathscr{A}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的指标函数, 集合 J 称为指标集, 集族 $\mathscr{A}$ 连同函数 φ 一起称为**加标集族**. 对每个 $\alpha\in J$, 记 $A_\alpha=\varphi(\alpha)$, 则对应的加标集族可记为 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$, 简记为 $\{A_\alpha\}$. 对集族 $\mathscr{A}$, 可导出自然的加标集族 $\{A\}_{A\in\mathscr{A}}$.

按集族的并与交的定义, 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的**并**与**交**分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha=\{x:\ 存在\ \alpha\in J,\ \ 使得\ x\in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha=\{x:\ 对任意\ \alpha\in J,\ x\in A_\alpha\}.$$

从而, 对任意的 $\beta\in J$, 有 $\bigcap\limits_{\alpha\in J}A_\alpha\subset A_\beta\subset\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$. 类似地, 对于加标集族有结合律、分配律等成立, 并有如下的 de Morgan 公式:

$$C-\left(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in J}(C-A_\alpha),$$

$$C-\left(\bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in J}(C-A_\alpha).$$

至于集族中集合的像及原像, 有下列定理, 其证明是常规的, 留给读者.

定理 1.1.1 设函数 $f: X\to Y$. 如果 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$, $\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(Y)$, 则

(1) $f\left(\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}A\right)\subset\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}f(A)$;

(2) $f\left(\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}A\right)=\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}f(A)$;

(3) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{B\in\mathscr{B}}B\right)=\bigcap\limits_{B\in\mathscr{B}}f^{-1}(B)$;

(4) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}}B\right)=\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}}f^{-1}(B)$.

本节最后介绍集族的笛卡儿积集. 我们用函数的观点来理解两个集合 A_1, A_2 的笛卡儿积集 $A_1\times A_2$. $A_1\times A_2$ 中的每一元 (a_1,a_2) 对应于集 $\{1,2\}$ 到 $A_1\cup A_2$ 的函数 f, 满足 $f(1)=a_1\in A_1$, $f(2)=a_2\in A_2$. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是加标集族, $X=\bigcup\limits_{\alpha\in J}X_\alpha$,

由 “函数 $x: J \to X$ 使得对每个 $\alpha \in J$, 有 $x(\alpha) \in X_\alpha$” 组成的集合

$$\{x: \text{对每个 } \alpha \in J, \text{ 有 } x(\alpha) \in X_\alpha\}$$

称为集族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 的**笛卡儿积**, 记为 $\prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$.

对每个 $x \in \prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$, $x(\alpha)$ 称为 x 的第 α 个**坐标**, 常记为 x_α, 同时 x 记为 $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ 或 (x_α). 对每个 $\alpha \in J$, 集合 X_α 称为笛卡儿积 $\prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$ 的第 α 个**坐标集**.

当对每个 $\alpha \in J$, $X_\alpha = X$ 时, 笛卡儿积 $\prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$, 记为 X^J. 当 J 是可数无限集时, X^J 称为集合 X 的可数笛卡儿积, 记为 X^ω. 显然, X^J 是从 J 到 X 的所有函数组成的集合.

对每个 $\beta \in J$, 函数 $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$ 定义为

$$\pi_\beta(x) = x_\beta, \quad x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha.$$

π_β 称为笛卡儿积 $\prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$ 关于 β 或向第 β 个坐标的**投影映射**, 简称**投射**. 易知, 投射 $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$ 是满的. 有时, 投射 π_β 也记为 p_β.

习　题　1.1

1.1.1 设 A, B, C 都是集合. 证明下列集合的运算律.

(1) 幂等律: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

(2) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(3) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(4) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.1.2 设函数 $f: X \to Y$. 若 $A \subset X$, $B \subset Y$, 证明:

(1) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$;

(2) $f(A - f^{-1}(B)) = f(A) - B$;

(3) 如果 f 是单的, 则 $f^{-1}(f(A)) = A$;

(4) 如果 f 是满的, 则 $f(f^{-1}(B)) = B$.

1.1.3 证明整数的集合 $\mathbb{Z}$, 笛卡儿积 $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ 及有理数集 $\mathbb{Q}$ 都是可数无限集.

1.1.4 证明下列关于可数集的命题:

(1) 可数集的任意子集是可数集;

(2) 可数集的有限笛卡儿积仍是可数集;

(3) 集合 X 是可数集当且仅当存在满射 $f: \mathbb{Z}_+ \to X$;

(4) 可数集的可数并是可数集.

1.1.5 证明下列关于不可数集的命题:

(1) 单位闭区间 $[0,1]$ 不是可数集;

(2) 设 $X=\{0,1\}$, 则 X^{ω} 是不可数集.

1.1.6 (Cantor-Bernstein 定理, 1897) 设集合 X,Y 满足: 既存在从 X 到 Y 的单射, 又存在从 Y 到 X 的单射. 证明: 存在 X 与 Y 之间的双射.

1.1.7 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是加标集族, C 是一个集合. 证明 de Morgan 公式:

(1) $C-\left(\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in J}(C-A_\alpha)$;

(2) $C-\left(\bigcap\limits_{\alpha\in J}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in J}(C-A_\alpha)$.

1.1.8 证明定理 1.1.1.

1.1.9 设 J 是不空的指标集. 对加标集族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 与 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$, 证明:

(1) 若对每一 $\alpha\in J$ 有 $X_\alpha\subset Y_\alpha$, 则 $\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha\subset\prod\limits_{\alpha\in J}Y_\alpha$;

(2) $\left(\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha\right)\cap\left(\prod\limits_{\alpha\in J}Y_\alpha\right)=\prod\limits_{\alpha\in J}(X_\alpha\cap Y_\alpha)$;

(3) $\left(\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha\right)\cup\left(\prod\limits_{\alpha\in J}Y_\alpha\right)\subset\prod\limits_{\alpha\in J}(X_\alpha\cup Y_\alpha)$.

问: (1) 的逆命题是否成立?

1.2 良 序

一般集合上序关系的确立及从自然数集过渡到良序集突破了人们对于传统的 “顺序” 及 “大小” 概念的认识.

设 X,Y 都是集合, 若 $R\subset X\times Y$, 则称 R 为从 X 到 Y 的**关系**. 如果 $(x,y)\in R$, 则称 x 与 y 有关系 R, 记为 xRy. 如果 R 是从集合 X 到 X 的关系, 则称 R 是 X 上 (或中) 的关系.

映射是一种特殊的关系.

设 R 是集合 X 上的关系. 如果 R 满足性质 (E1) $\sim$ (E3), 则称 R 是 X 上的**等价关系**,

(E1) 自反性: 对任意 $x\in X$, 有 xRx;

(E2) 对称性: 若 xRy, 则 yRx;

(E3) 传递性: 若 xRy 且 yRz, 则 xRz.

常用 “$\sim$” 表示等价关系. 若 $x\sim y$, 则称 x 与 y 等价.

给定集合 X 上的等价关系 R, 就可以按下述方式把 X 中的元素进行分类. 如果 $x \in X$, 则集合 $\{y \in X : xRy\}$ 或 $\{y \in X : x \sim y\}$ 称为由 x 决定的*等价类*, 记为 $[x]_R$ 或 $[x]$.

显然, $x \in [x]$. 集合 X 上的等价类具有如下性质.

引理 1.2.1 集合 X 的任意两个等价类或相等或不相交.

证明 对 $x,\ x' \in X$, 设 $E = [x],\ E' = [x']$. 若 $E \cap E' \neq \varnothing$, 则存在 $y \in E \cap E'$. 往证 $E = E'$.

根据定义, $x \sim y$ 且 $x' \sim y$. 由对称性, $y \sim x$ 且 $y \sim x'$. 对任意的 $z \in E$, 则有 $x \sim z$. 因为 $x' \sim y$ 且 $y \sim x$, 所以由传递性得 $x' \sim z$, 于是 $z \in E'$, 即 $E \subset E'$. 同理, $E' \subset E$. 所以 $E = E'$. □

引理 1.2.1 说明, 给定了集合 X 上的等价关系, 等于给定了集合 X 上的一个分类原则, 它把集合 X 分割为互不相交的等价类, 且全体等价类之并等于 X.

例 1.2.1 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义关系 R 如下: 对 $p_1(x_1, y_1),\ p_2(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$p_1 R p_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

即它们到原点的距离相等, 则 R 是 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系. 每个等价类或者是原点集, 或者是以原点为中心的圆周.

定义 1.2.1 设 R 是 X 上的等价关系, 集族 $\{[x] : x \in X\}$ 称为集合 X 关于 R 的*商集*, 记为 X/R. 映射 $p : X \to X/R$ 定义为 $p(x) = [x],\ x \in X$, 称为*自然投射*.

显然, p 是满射.

接着介绍序关系. 设 R 是集合 X 上的关系. 如果 R 满足条件 (P1) ~ (P3), 则称 R 是 X 上的*偏序关系*,

(P1) 自反性: 任意 $x \in X$, 有 xRx;

(P2) 唯一性: 若 xRy 且 yRx, 则 $x = y$;

(P3) 传递性: 若 xRy 且 yRz, 则 xRz.

常用 “$\leqslant$” 表示偏序关系. X 赋以偏序关系称为*偏序集*, 记为 $(X,\ \leqslant)$.

对任意集合 X, 在幂集 $\mathscr{P}(X)$ 上定义关系 R 如下: 对 $A,\ B \in \mathscr{P}(X)$, $ARB \Leftrightarrow A \subset B$, 则 R 是 $\mathscr{P}(X)$ 上的偏序关系, 称为*包含关系*.

设 R 是集合 X 上的关系. 如果 R 满足条件 (T1) ~ (T3), 则称 R 是 X 上的*全序关系*, 或*线性序关系*,

(T1) 可比较性: 若任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 则 xRy 或 yRx;

(T2) 非自反性: X 中没有 x, 使得 xRx 成立;

(T3) 传递性: 若 xRy 且 yRz, 则 xRz.

常用 “$<$” 表示全序关系. X 赋以全序关系称为*全序集*, 记为 $(X,\ <)$.

在全序关系中, (T1) 中的 xRy 与 yRx 不能同时成立, 否则由 (T3) 可得 xRx, 这与 (T2) 矛盾. 在 (T3) 条件下, (T1) 和 (T2) 等价于下述**三分律**: 若任意 $x, y \in X$, 则下列三式恰有一式成立: xRy, $x = y$, yRx.

设 $<$ 是集合 X 上的全序关系, 把 "或 $x < y$, 或 $x = y$" 用记号 "$x \leqslant y$" 表示; "$x < y$" 也可用 "$y > x$" 表示; 用 "$x < y < z$" 表示 "$x < y$ 且 $y < z$". 这时, 对 $a, b \in X$ 且 $a < b$, 记集合 $\{x \in X : a < x < b\} = (a, b)$, 称为 X 中的**开区间**. 如果 $(a, b) = \varnothing$, 则称 a 为 b 的**紧接前元**, b 为 a 的**紧接后元**.

如何定义集合的基数之间的 "大小" 关系? 设 X, Y 都是集合, 它们的基数分别为 $|X| = m$, $|Y| = n$. 定义 $m \leqslant n \Leftrightarrow$ 存在从 X 到 Y 内的单射; 如果 $m \leqslant n$, 且 $m \neq n$, 则定义 $m < n$. 由 Cantor-Bernstein 定理 (见习题 1.1.6), 若 $m \leqslant n$ 且 $n \leqslant m$, 则 $m = n$. 对任意有限基数 n, 有 $n < \aleph_0 < \mathbf{c}$.

例 1.2.2 (1) 实数集 $\mathbb{R}$ 上的关系 "$<$" (即所有满足 $x < y$ 的实数对 (x, y) 组成的关系) 是全序关系, 称为实数集上**通常的全序关系**.

(2) $\mathbb{R}$ 上的关系 R 定义为: 对 $x,\ y \in \mathbb{R}$,

$$xRy \Leftrightarrow x^2 < y^2,\ \text{或}\ x^2 = y^2\ \text{且}\ x < y,$$

其中 "$<$" 是 (1) 中实数集上通常的全序关系, 则 R 是 $\mathbb{R}$ 上的全序关系.

设 $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ 都是全序集. 如果存在满射 $f : A \to B$ 满足:

$$\text{对}\ a_1, a_2 \in A,\ \text{当}\ a_1 <_A a_2\ \text{时, 有}\ f(a_1) <_B f(a_2),$$

则称 A 和 B 有相同的**序型**, 函数 f 称为**保序映射**. 对全序集 A, A 的序型用 $\mathrm{o}(A)$ 表示. 从而, $\mathrm{o}(A) = \mathrm{o}(B)$ 当且仅当存在 A 到 B 上的保序映射.

如, $\mathbb{R}$ 的两个子集 $A = \{0\} \cup (1, 2)$ 与 $B = [0, 1)$ 在通常的全序关系下有相同的序型. 事实上, 由 $f(0) = 0$, 且当 $x \in (1, 2)$ 时, $f(x) = x - 1$ 所定义的函数 $f : A \to B$ 是保序映射.

定义 1.2.2 设 $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ 都是全序集. 对 $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, 定义

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 <_A a_2,\ \text{或}\ a_1 = a_2\ \text{且}\ b_1 <_B b_2.$$

易证, $<$ 是 $A \times B$ 上的全序关系, 称为 $A \times B$ 上的**字典序关系**, 简称**字典序**.

例 1.2.3 具有通常的全序关系的实数集 $[0, 1)$ 及正整数集 $\mathbb{Z}_+$, 赋予 $\mathbb{Z}_+ \times [0, 1)$ 字典序, 则 $\mathbb{Z}_+ \times [0, 1)$ 与非负实数集 $[0, +\infty)$ 有相同的序型. 事实上, 函数

$$f : \mathbb{Z}_+ \times [0, 1) \to [0, +\infty)$$

定义为

$$f(n, t) = n + t - 1, \quad (n, t) \in \mathbb{Z}_+ \times [0, 1),$$

则 f 是保序映射. 但具有字典序的集合 $[0,1)\times\mathbb{Z}_+$ 则有不同的序型, 因为它的每个元素都有紧接后元, 见图 1.2.1.

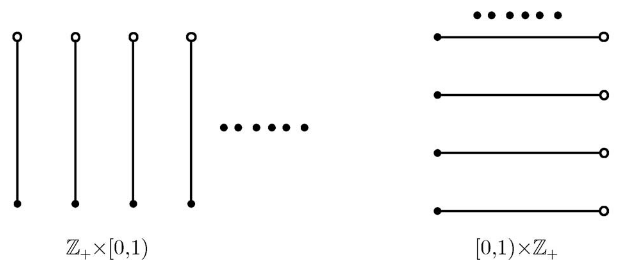


图 1.2.1

在实数理论中, 实数集有 "上确界性质", 对任意全序集也可以定义这个性质.

设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集, $Y\subset X$. 如果 $b\in Y$ 且若 $y\in Y$ 使得 $b\leqslant y$, 则 $b=y$, 那么称 b 是 Y 的*极大元*; 如果 $a\in Y$ 且若 $y\in Y$ 使得 $a\geqslant y$, 则 $a=y$, 那么称 a 是 Y 的*极小元*.

设 $(X, <)$ 是全序集, $Y\subset X$. 如果 $b\in Y$ 且对任意 $y\in Y$, 有 $y\leqslant b$, 则称 b 为 Y 的*最大元*; 如果 $a\in Y$ 且对任意 $y\in Y$, 有 $a\leqslant y$, 则称 a 为 Y 的*最小元*; 如果存在 $b\in X$, 对任意 $y\in Y$, 有 $y\leqslant b$, 则称 b 是 Y 的*上界*, 而 X 的子集 Y 称为是*有上界的*; 如果 Y 的所有上界的集合有最小元, 那么该元素称为 Y 的*上确界*, 记为 $\sup Y$. 类似地, 可以给出集合 Y 的*下界*、*有下界的集*及*下确界* $\inf Y$ 的定义.

易知, 一个偏序集的子集的极大元或极小元可以不止一个; 一个全序集的子集至多有一个最大元, 也至多有一个最小元. 全序集的子集 Y 的上确界 (下确界) 可以属于 Y, 也可以不属于 Y, 如果 Y 的上确界 (下确界) 属于 Y, 则它就是 Y 的最大元 (最小元).

定义 1.2.3 设 $(X, <)$ 是全序集. 若 X 的每个有上界 (有下界) 的非空子集都有上确界 (下确界), 则称 X 具有*上确界性质* (*下确界性质*).

显然, 具有通常全序关系的实数集 $A=(a,b)$ $(a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b)$ 有上确界性质、下确界性质, 而集合 $B=(-1,0)\cup(0,1)$ 既不具有上确界性质, 也不具有下确界性质.

把正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 在通常序关系下所具有的性质: 每个非空子集都有最小元, 推广到一般的全序集就得到良序集的概念.

定义 1.2.4 设 $(X, <)$ 是全序集. 如果 X 中每个非空子集都有最小元, 则称 X 是*良序集*.

实数集 $\mathbb{R}$ 在通常的序关系下不是良序集, 因为 $\mathbb{R}$ 的整数子集 $\mathbb{Z}$ 没有最小元.

区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ $(a<b)$ 在通常序关系下也不是良序集. 显然, 良序集的非空子集仍是良序集.

例 1.2.4 在字典序下, 集合 $\{0,1\}\times\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 都是良序集.

在字典序下, 集合 $\{0,1\}\times\mathbb{Z}_+$ 的元素可排列为

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,b_1,b_2,b_3,\cdots,$$

其中 $a_n=(0,n)$, $b_n=(1,n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$ 且 $a_n<a_{n+1}$, $b_m<b_{m+1}$, $a_n<b_m$, $n,m\in\mathbb{Z}_+$.

对 $\{0,1\}\times\mathbb{Z}_+$ 的任意非空子集 X, 如果 $X\cap\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}\neq\varnothing$, 则 X 有最小元形如 a_{n_0}; 如果 $X\cap\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}=\varnothing$, 则 X 有最小元形如 b_{m_0}. 从而, $\{0,1\}\times\mathbb{Z}_+$ 是良序集.

现在, 设 X 是集合 $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 的任意非空子集. 令 $A=\{a\in\mathbb{Z}_+:(a,b)\in X\}$, 则 A 是 $\mathbb{Z}_+$ 的非空子集, 它有最小元 a_0. 令 $B=\{b\in\mathbb{Z}_+:(a_0,b)\in X\}$, 则 B 是 $\mathbb{Z}_+$ 的非空子集, 它有最小元 b_0. 根据字典序的定义, (a_0,b_0) 是 X 的最小元. 因此, $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 也是良序集.

一般地, 易证良序集的有限积按字典序是良序集.

例 1.2.5 可数个 $\mathbb{Z}_+$ 的积 $\mathbb{Z}_+^\omega$ 在字典序下不是良序集.

$\mathbb{Z}_+^\omega$ 上的字典序定义为: 任意 $(a_1,a_2,\cdots)$, $(b_1,b_2,\cdots)\in\mathbb{Z}_+^\omega$,

$$(a_1,a_2,\cdots)<(b_1,b_2,\cdots)\Leftrightarrow a_1<b_1 \text{ 或 } \exists\, n>1,\ \text{当 } i<n \text{ 时 } a_i=b_i,\ \text{且 } a_n<b_n.$$

设 X 是 $\mathbb{Z}_+^\omega$ 中形如 $x=(1,\cdots,1,2,1,\cdots,1,\cdots)$ 的元素的集合, 其中 x 只有一个坐标等于 2, 其余都是 1. 易知, X 没有最小元.

例 1.2.5 表明, 集合 $\mathbb{Z}_+^\omega$ 上的字典序关系不是它的良序关系. 那么在这个集合上是否有别的全序关系, 使它成为良序集呢? 下面著名的良序定理给这个问题以肯定答案.

定理 1.2.1 (*良序定理*) 若 X 是一个集合, 则存在 X 上的全序关系, 使 X 成为良序集.

这个定理是 1904 年, E. Zermelo (德, 1871~1953) 给出的, 常称为 Zermelo 良序定理, 它的提出开辟了集合论发展的正确方向, 它是公理集合论中最重要的结果之一, 致使 20 世纪 20 年代数学基础中 ZFC 系统的建立. 良序定理的证明依赖于集论公理系统, 它与 1.3 节要介绍的选择公理是等价的.

如果 X 存在全序关系, 使 X 成为良序集, 则称 X *可良序化*. 因此, 良序定理又可叙述为: 每个集合都可良序化.

给定一个集合, 将其良序化的构造过程是复杂的. 对不空的有限集 X, 任意双射 $f: X \to \{1,2,\cdots,n\}$ 能够定义 X 上的全序关系, 使 X 与全序集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的序型相同.

良序集的序型称为*序数*. 设 X,Y 是两个全序集, 由于保序映射是双射, 所以 $\mathrm{o}(X)=\mathrm{o}(Y) \Rightarrow |X|=|Y|$. 于是, 每个序数都对应唯一确定的基数. 有限良序集的序数规定为这集的元素的个数, 称为*有限序数*; 可数 (无限、可数无限、不可数) 的良序集的序数称为*可数序数* (*无限序数*、*可数无限序数*、*不可数序数*). 正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 按自然顺序是良序的, 规定 $\mathrm{o}(\mathbb{Z}_+)$ 为 ω. ω 是可数无限序数.

为了定义两个序数的 "大小", 引入全序集的节的概念. 设 X 是全序集. 给定 $\alpha \in X$, 集合 $S_\alpha=\{x\in X: x<\alpha\}$ 称为 X 在 α 处的*节*. 两个序数 α,β 的 "大小" 规定如下: 设 $\mathrm{o}(X)=\alpha$, $\mathrm{o}(Y)=\beta$, 定义 $\alpha<\beta \Leftrightarrow$ 存在 $y_0\in Y$, 使 X 与 Y 在 y_0 处的节 $S_{y_0}=\{y\in Y:\ y<y_0\}$ 的序型相同. 从而, 0 是最小序数, ω 是*最小的无限序数* (见习题 1.2.6). 可以证明, 序数所成集按关系 $<$ 是良序的 [1].

根据良序定理可得: 存在不可数的良序集. 下面构造一个 "最小" 的不可数良序集.

定理 1.2.2 存在不可数的良序集, 其每一节是可数集.

证明 设 X 是任意一个不可数的良序集. 令 $Y=\{\alpha\in X: S_\alpha$ 是不可数集 $\}$. 若 $Y=\varnothing$, 则 Y 符合定理的要求. 若 $Y\neq\varnothing$, 由于 X 是良序集, 所以 Y 有最小元, 记为 Ω. 于是, S_Ω 是不可数的良序集, 且它的每一节是可数集. □

把定理 1.2.2 中的不可数良序集的的序型记为 ω_1, 则 ω_1 是*最小的不可数序数*. 序数的集合 $[0,\omega_1)$ 称为*最小的不可数良序集*. 对任意 $\alpha\in[0,\omega_1)$, $[0,\omega_1)$ 在 α 处的节 $S_\alpha=[0,\alpha)$.

推论 1.2.1 如果 A 是 $[0,\omega_1)$ 的可数子集, 则 A 在 $[0,\omega_1)$ 中有上界.

证明 对每个 $\alpha\in A$, $[0,\alpha)$ 是可数集, 于是 $B=\bigcup\limits_{\alpha\in A}[0,\alpha)$ 也是可数集. 因为 $[0,\omega_1)$ 是不可数集, 所以 $B\neq[0,\omega_1)$. 设 $\beta\in[0,\omega_1)-B$, 则 β 为 A 的上界. 事实上, 如果存在 $\alpha\in A$, 使 $\beta<\alpha$, 则 $\beta\in[0,\alpha)\subset B$, 这与 β 的选取矛盾. □

习 题 1.2

1.2.1 设 $f: X\to Y$ 是满映射. 在 X 上定义关系 R 如下: 对 $x_1,x_2\in X$, $x_1Rx_2\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$. 证明:

(1) R 是 X 上的等价关系;

(2) 存在商集 X/R 与 Y 之间的双射.

1.2.2 对实数集的子集 $[0,1]=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$ 和 $[0,1)=\{x:0\leqslant x<1\}$, 下列集合在

字典序下具有上确界性质吗?

$$[0,1]\times[0,1],\quad [0,1]\times[0,1),\quad [0,1)\times[0,1].$$

1.2.3 设 $(X,\ <)$ 是全序集. 证明: X 具有上确界性质当且仅当 X 有下确界性质.

1.2.4 证明: 任意良序集具有上确界性质.

1.2.5 证明: 良序集的有限积按字典序是良序集.

1.2.6 证明: ω 是最小的无限序数.

1.2.7 证明最小不可数良序集 $[0,\omega_1)$ 的下列性质:

(1) $[0,\omega_1)$ 没有最大元;

(2) 对任意 $\alpha<\omega_1$, 集合 $\{x:\alpha<x<\omega_1\}$ 是不可数集;

(3) 令 $X_0=\{x\in[0,\omega_1):x$ 没有紧接前元$\}$, 则 X_0 是不可数集.

1.3 选择公理

为了更好地理解选择公理及其等价命题, 先给出无限集的一个刻画.

定理 1.3.1 设 A 是一个集合. 下列条件等价:

(1) A 是无限集;

(2) 存在单射 $f:\mathbb{Z}_+\to A$;

(3) 存在 A 与其某真子集之间的双射.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 A 是无限集, 用归纳法定义单射 $f:\mathbb{Z}_+\to A$.

首先, 因为 $A\neq\varnothing$, 取定 $a_1\in A$, 定义 $f(1)=a_1$. 假设对正整数 $k<n$, 已经定义了 $f(k)$. 因为 A 是无限集, 所以集合 $A-\{f(1),f(2),\cdots,f(n-1)\}$ 是非空的, 取定 $A-\{f(1),f(2),\cdots,f(n-1)\}$ 中的一个元素, 定义 $f(n)$ 等于该元素. 应用归纳法, 上述方式定义了映射 $f:\mathbb{Z}_+\to A$. 下面证明 f 是单射.

设 $m,n\in\mathbb{Z}_+,m\neq n$. 不妨设 $m<n$, 则 $f(m)\in\{f(1),f(2),\cdots,f(n-1)\}$. 而 $f(n)\in A-\{f(1),f(2),\cdots,f(n-1)\}$, 所以 $f(m)\neq f(n)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $f:\mathbb{Z}_+\to A$ 是单射. 记 $a_n=f(n)\in A,\ n\in\mathbb{Z}_+$. 因为 f 是单射, 所以当 $n\neq m$ 时, $a_n\neq a_m$. 令 $B=f(\mathbb{Z}_+)$, 并定义 $g:A\to A-\{a_1\}$ 如下:

$$g(x)=\begin{cases} f(a_{n+1}), & x=a_n\in B,\\ x, & x\in A-B,\end{cases}$$

则 g 是双射.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设存在双射 $f:A\to B$, 其中集合 B 是集合 A 的某个真子集. 如果 A 是有限集, 则 A 不是空集, 所以存在 $n\in\mathbb{Z}_+$, 使 A 是 n 元集. 记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 其中当正整数 $i\neq j\leqslant n$ 时, $a_i\neq a_j$, 则 $B=\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}$ 也是 n 元集. 这与 B 是 A 的真子集矛盾. 从而 A 是无限集. □

定理 1.3.1 表明: $\aleph_0$ 是最小的无限基数. 在定理关于 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明中, f 的这种"定义"含有无限多种选择. 这引导我们更加关注数理逻辑中的一个问题: 选择公理.

公理 1.3.1 (选择公理) 若 $\mathscr{A}$ 是由互不相交的非空集合构成的族, 则存在集合 C, 使得 C 与 $\mathscr{A}$ 中的每个元素恰好有一个公共元, 即对每个 $A \in \mathscr{A}$, 集合 $C \cap A$ 只有一个元素.

选择公理中存在的集合 C 可以理解为从 $\mathscr{A}$ 的每个集合 A 中选取一个元素而得到. 假定选择公理成立, 证明以下结论.

定理 1.3.2 若 $\mathscr{A}$ 是由非空集合构成的族, 则存在函数 $c: \mathscr{A} \to \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$ 使得对每个 $A \in \mathscr{A}$, 有 $c(A) \in A$.

证明 对每个 $A \in \mathscr{A}$, 定义集合 $A' = \{(A, a) : a \in A\}$, 则 $A' \neq \varnothing$. 记集族 $\mathscr{A}' = \{A' : A \in \mathscr{A}\}$, 则 $\mathscr{A}'$ 中任意两个不同的元素是不相交的. 事实上, 设 A_1', A_2' 是 $\mathscr{A}'$ 中两个不同的元素, 存在 A_1, $A_2 \in \mathscr{A}$ 使 $A_1' = \{(A_1, a) : a \in A_1\}$, $A_2' = \{(A_2, a) : a \in A_2\}$, 由于 $A_1 \neq A_2$, 所以 $A_1' \cap A_2' = \varnothing$.

根据选择公理, 存在集合 C, 它与 $\mathscr{A}'$ 中的每个元素恰好有一个公共元.

对每一 $A \in \mathscr{A}$, $A' \in \mathscr{A}'$, 存在唯一 $a \in A$ 使得 $(A, a) \in C$, 定义 $c(A) = a$. 由此, 定义了函数 $c: \mathscr{A} \to \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$ 满足所需的要求. □

定理 1.3.2 中的函数 c 称为集族 $\mathscr{A}$ 的*选择函数*.

选择公理看似"显然", 实则"极不平凡". 它是数学中除"平行公设"以外最引人注目的一条公理, 是 20 世纪数学发展的重要源泉. 1938 年, K. Gödel (奥–美, 1906～1978) 证明了选择公理与通常的集合论 ZF 系统是相容的. 1963 年, P. J. Cohen (美, 1934～2007) 证明了否定选择公理也与 ZF 系统是相容的. 所以选择公理在通常集合论的 ZF 系统中是不可判定的问题. 选择公理与良序定理 (定理 1.2.1), 及下面要介绍的 Zorn 引理、Hausdorff 极大原理和 Tukey 引理等都是相互等价的. 他们的等价性的证明可以见参考文献 [2] 或 [3].

定理 1.3.3 (Zorn 引理, 1935) 若偏序集 X 的每个全序子集都有上界, 则 X 必有极大元.

定理 1.3.4 (Hausdorff 极大原理, 1914) 若 $(X, <)$ 是偏序集, 则 X 中存在极大的全序子集.

定义 1.3.1 设 $\mathscr{A}$ 是一个集族. 如果 A 是 $\mathscr{A}$ 的元素当且仅当 A 的每个有限子集是 $\mathscr{A}$ 的元素, 则称集族 $\mathscr{A}$ 具有*有限特征*.

定理 1.3.5 (Tukey 引理, 1940) 每个非空的具有有限特征的集族关于包含关系存在极大元.

推论 1.3.1 设 $\mathscr{A}$ 是具有有限特征的集族. 若 $A_0 \in \mathscr{A}$, 则 $\mathscr{A}$ 中存在包含 A_0 的极大元.

习 题 1.3

1.3.1 证明选择公理与下述命题等价: 对任意加标非空集族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $J \neq \varnothing$, 笛卡儿积集 $\prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha \neq \varnothing$.

1.3.2 如果 $f: A \to B$ 是满射, 证明存在映射 $h: B \to A$ 使得 $f \circ h = i_B$.

1.3.3 从良序定理证明 Zorn 引理.

1.3.4 从 Zorn 引理证明每个非零的向量空间存在 Hamel 基.

第 2 章　拓 扑 空 间

拓扑空间的概念来源于实直线及其上连续函数的研究. 1914 年, F. Hausdorff (德, 1868～1942) 的著作 *Grundzüge der Mengenlehre* 标志着一般拓扑学成为一门独立的学科. *一般拓扑学*, 也称*点集拓扑学*, 主要研究拓扑空间的自身结构及其间的连续映射. 它不只是拓扑学的基础, 而且在与几何、分析相关的学科中都有广泛的应用. 本章以介绍拓扑空间与连续映射为线索, 给出一些生成空间拓扑的途径, 引入拓扑空间中几类重要子集及其运算, 介绍三种构造新空间的基本方法.

2.1　拓 扑 空 间

本节定义拓扑空间的概念, 介绍生成拓扑的邻域方法, 用与数学分析中不同的方式引入函数的连续性.

定义 2.1.1　设 X 是一个集合, τ 是 X 的子集族. 如果 τ 满足以下条件, 则称 τ 是 X 上的*拓扑*:

(O1) $\varnothing,\ X \in \tau$;

(O2) 若 $A_1, A_2 \in \tau$, 则 $A_1 \cap A_2 \in \tau$;

(O3) 若 $\tau_1 \subset \tau$, 则 $\bigcup\limits_{A \in \tau_1} A \in \tau$.

(X, τ) 称为*拓扑空间*, 在不致引起混淆的情况下, 简写成 X 是拓扑空间. τ 的元素称为拓扑空间 (X, τ) 中的*开集*.

由条件 (O2) 可推得:

(O2′) 若 $A_i \in \tau, 1 \leqslant i \leqslant n$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

例 2.1.1　平庸空间与离散空间.

设 X 是一个集合, $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$. 容易验证, τ_0 是 X 上的拓扑, 称为 X 的*平庸拓扑*, (X, τ_0) 称为*平庸空间*. 在平庸空间中, 有且仅有两个开集, 即 X 本身与空集 $\varnothing$.

对集合 X, 令 $\tau_1 = \mathscr{P}(X)$, 则 τ_1 是 X 上的拓扑, 称为 X 的*离散拓扑*, (X, τ_1) 称为*离散空间*. 在离散空间中, X 的每个子集是开集.

例 2.1.2　设 $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$. 容易验证, τ 是 X 上的拓扑. 这个拓扑空间 (X, τ) 既不是平庸空间, 也不是离散空间.

由此可知, 只有三个元素的集合, 可有多种不同的拓扑. 但是这并不表明 X 的子集的任意族是 X 的拓扑. 如集族 $\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$ 不是 X 上的拓扑, 因为它不满足条件 (O3).

例 2.1.3 有限补空间.

设 X 是一个集合, 令

$$\tau = \{\varnothing\} \cup \{U \subset X : X - U \text{ 是有限集}\}.$$

验证 τ 是 X 上的拓扑.

显然, τ 满足条件 (O1). 设 $A_1, A_2 \in \tau$. 如果 A_1, A_2 之中有一个是空集, 则 $A_1 \cap A_2 = \varnothing \in \tau$. 如果 A_1, A_2 都不是空集, 则 $X - A_1$ 与 $X - A_2$ 都是有限集, 因而

$$X - (A_1 \cap A_2) = (X - A_1) \cup (X - A_2)$$

也是有限集. 根据定义, $A_1 \cap A_2 \in \tau$. 所以 τ 满足条件 (O2).

设 $\tau_1 \subset \tau$. 不妨设存在不空的 $A_1 \in \tau_1$. 由于 $A_1 \subset \bigcup\limits_{A \in \tau_1} A$, 于是

$$X - \bigcup_{A \in \tau_1} A \subset X - A_1$$

是有限集, 故 $\bigcup\limits_{A \in \tau_1} A \in \tau$. 从而 τ 满足条件 (O3).

综上所述, τ 是 X 上的拓扑, 称之为 X 的*有限补拓扑*, (X, τ) 称为*有限补空间*.

从以上各例可见, 一个集合上一般可定义多种拓扑.

定义 2.1.2 (拓扑的比较) 设 τ_1 与 τ_2 是集合 X 上的两个拓扑. 如果 $\tau_1 \subset \tau_2$, 则称 τ_2 *细于* τ_1 或 τ_1 *粗于* τ_2. 如果 $\tau_1 \subset \tau_2$ 是严格的含于关系, 则称 τ_2 *严格细于* τ_1 或 τ_1 *严格粗于* τ_2.

集合 X 上的平庸拓扑是最粗的拓扑, 离散拓扑是最细的拓扑.

对集合 X 的两个拓扑 τ_1, τ_2, 如果 $\tau_1 \subset \tau_2$ 或 $\tau_2 \subset \tau_1$, 则称拓扑 τ_1 与 τ_2 是可比较的. 值得注意的是集合 X 上的任意两个拓扑, 不一定都能比较. X 上的拓扑之间的粗细关系是偏序关系.

空间的拓扑是一个整体的概念. 研究拓扑空间中一点附近的性质常依赖于点的邻域系.

定义 2.1.3 设 (X, τ) 是拓扑空间, $x \in X, U \subset X$. 如果存在开集 $V \in \tau$ 使得 $x \in V \subset U$, 则称 U 是 x 的*邻域*. 如果 U 还是开集, 则称 U 是 x 的*开邻域*. x 的所有邻域构成的 X 的子集族称为 x 的*邻域系*.

在拓扑空间中, 一个点的邻域不一定是开邻域, 但它一定包含着该点的某个开邻域. 在平庸空间 X 中, 点 $x \in X$ 只有一个邻域, 即 X 本身. 在离散空间 X 中, 含有点 $x \in X$ 的任意集合是 x 的开邻域, 特别地, 单点集 $\{x\}$ 是 x 的开邻域.

定理 2.1.1　拓扑空间 X 的子集 U 是开集当且仅当 U 是它的每一点的邻域.

证明　必要性是显然的. 下证充分性. 如果 $x \in U$, 根据定义 2.1.3, 存在开集 V_x, 使 $x \in V_x \subset U$. 由于

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} V_x \subset U,$$

因而 $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$. 根据拓扑定义的 (O3), U 是开集. □

下面介绍邻域系的基本性质.

定理 2.1.2　设 X 是拓扑空间. 对每一 $x \in X$, 记 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系, 则 $\mathscr{U}_x$ 有如下性质:

(N1) $X \in \mathscr{U}_x$;

(N2) 如果 $U \in \mathscr{U}_x$, 则 $x \in U$;

(N3) 如果 $U \in \mathscr{U}_x$ 且 $U \subset W$, 则 $W \in \mathscr{U}_x$;

(N4) 如果 $U,\ V \in \mathscr{U}_x$, 则 $U \cap V \in \mathscr{U}_x$;

(N5) 如果 $U \in \mathscr{U}_x$, 则存在 $V \in \mathscr{U}_x$, 使得 $V \subset U$ 且对每个 $y \in V$, 有 $V \in \mathscr{U}_y$.

证明　(N1) 因为 X 自身是开集且 $x \in X$, 所以 $X \in \mathscr{U}_x$. (N2) 是显然的.

(N3) 设 $U \in \mathscr{U}_x$, 且 $U \subset W$, 则存在开集 V, 使得 $x \in V \subset U$, 于是 $x \in V \subset W$. 因此, $W \in \mathscr{U}_x$.

(N4) 设 $U,\ V \in \mathscr{U}_x$, 则存在开集 U_0 与 V_0 使得 $x \in U_0 \subset U$ 与 $x \in V_0 \subset V$. 由拓扑定义的 (O2), $U_0 \cap V_0$ 是开集且 $x \in U_0 \cap V_0 \subset U \cap V$. 从而, $U \cap V \in \mathscr{U}_x$.

(N5) 设 $U \in \mathscr{U}_x$, 则存在开集 V 使 $x \in V \subset U$. 由于 V 是开集, 根据定理 2.1.1, 对每个 $y \in V$, 有 $V \in \mathscr{U}_y$. □

(N1) 表明, 对每个 $x \in X$, $\mathscr{U}_x \neq \varnothing$. (N3) 表明, 如果 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}_x$ 的非空子族, 则 $\bigcup\limits_{U \in \mathscr{U}'} U \in \mathscr{U}_x$.

定义 2.1.1 是从开集出发定义拓扑空间, 也可以从邻域出发生成拓扑空间.

定理 2.1.3　设 X 是一个集合. 如果对每个 $x \in X$ 都对应 X 的子集族 $\mathscr{U}_x$, 满足定理 2.1.2 中的条件 (N1) $\sim$ (N5), 则集族

$$\tau = \{U \subset X :\ 如果\ x \in U,\ 则\, U \in \mathscr{U}_x\}$$

是 X 上的唯一的拓扑使得对每个 $x \in X$, 子集族 $\mathscr{U}_x$ 恰好是 x 在拓扑空间 (X, τ) 中的邻域系.

定理 2.1.3 的证明留给读者.

数学分析中函数的连续性是用极限或 ε-δ 语言来描述的, 其本质反映了两个拓扑空间之间点的邻域或拓扑空间中的开集间的关系.

定义 2.1.4 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是函数. 如果 Y 中每个开集 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集, 则称 f 是从空间 X 到空间 Y 的**连续函数**, 简称 f **连续**.

由定义 2.1.4, 可得

定理 2.1.4 设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间, 则

(1) 恒等映射 $i_X : X \to X$ 连续;

(2) 如果 $f: X \to Y$ 是常值映射, 则 f 连续;

(3) 如果 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 都是连续函数, 则 $g \circ f: X \to Z$ 也连续.

在定理 2.1.4 中, 恒等映射 i_X 的像空间 X 与原像空间 X 具有同一个拓扑. 对于不是同一拓扑的情况: 恒等映射 $i_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ 连续当且仅当 $\tau_2 \subset \tau_1$.

容易验证, 定义在离散空间上的任意函数是连续的; 值域为平庸空间的任意函数也是连续的.

定义 2.1.5 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是函数, $x \in X$. 如果 $f(x)$ 的每个邻域 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域, 则称 f 在 x **连续**.

定义 2.1.4 和定义 2.1.5 形式上与数学分析中函数连续性的定义不同, 原因是拓扑空间中没有 "距离" 的概念, 当讨论 "度量空间" 时, 它们与通常的连续性是等价的 (见后面的定理 3.1.5).

由定义 2.1.5, 可得

定理 2.1.5 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是函数, $x \in X$. f 在 x 连续当且仅当对 $f(x)$ 的每个邻域 U, 存在 x 的邻域 V 使得 $f(V) \subset U$.

函数在点 $x \in X$ 连续, 有与定理 2.1.4 类似的结果. 下面的定理给出了函数在空间 X 上连续与在点 $x \in X$ 连续的联系.

定理 2.1.6 设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 若 $f: X \to Y$ 是函数, 则 f 连续当且仅当对每一点 $x \in X$, f 在点 x 连续.

证明 必要性. 设 f 连续, $x \in X$. 如果 U 是 $f(x)$ 的邻域, 则存在开集 V 使得 $f(x) \in V \subset U$. 于是 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集且 $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$. 因而 $f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域. f 在 x 连续.

充分性. 设对每一点 $x \in X$, f 在 x 连续. 如果 U 是 Y 中的开集, 则对每个点 $x \in f^{-1}(U)$, 由于 $f(x) \in U$, U 是 $f(x)$ 的邻域, 因此 $f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域. 根据定理 2.1.1, $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集. 故 f 连续. □

定义 2.1.6 设 X 和 Y 都是拓扑空间. 如果函数 $f: X \to Y$ 是双射且 f 和它的逆函数 $f^{-1}: Y \to X$ 都连续, 则称 f 是**同胚映射**或**同胚**. 这时, 称空间 X 与空间 Y 是同胚的.

容易验证以下结论.

定理 2.1.7 若 X, Y 和 Z 都是拓扑空间, 则

(1) 恒等映射 $i_X : X \to X$ 是同胚;

(2) 如果 $f : X \to Y$ 是同胚, 则 $f^{-1} : Y \to X$ 也是同胚;

(3) 如果 $f : X \to Y$ 与 $g : Y \to Z$ 都是同胚, 则 $g \circ f : X \to Z$ 也是同胚.

由此可知, 若 X, Y 和 Z 都是拓扑空间, 那么 ① X 与 X 同胚; ② 如果 X 与 Y 同胚, 则 Y 与 X 同胚; ③ 如果 X 与 Y 同胚且 Y 与 Z 同胚, 则 X 与 Z 同胚. 从而, 在拓扑空间组成的集族中, 拓扑空间之间的同胚关系是等价关系.

设 $\mathscr{P}$ 表示拓扑空间的某种性质. 如果拓扑空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$, 则与 X 同胚的任何拓扑空间也都具有性质 $\mathscr{P}$, 则称性质 $\mathscr{P}$ 是*同胚不变性质*或*拓扑不变量*, $\mathscr{P}$ 也称为*拓扑性质*. 拓扑不变量即为同胚的拓扑空间所共有的性质. 由同胚的定义, $f : X \to Y$ 是同胚不仅给出 X 和 Y 之间的双射, 而且还给出了 X 与 Y 的开集族之间的双射 (见习题 2.1.6). 因此, 完全依赖于开集或与开集概念等价的概念的性质 $\mathscr{P}$, 自然就是拓扑性质.

*拓扑学的中心任务*是研究拓扑不变量. *一般拓扑学的基本问题之一*是寻求并研究自然的拓扑不变量. 第 3 章将介绍一些重要的拓扑不变量.

习　题　2.1

2.1.1　对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令 $A_n = \{m \in \mathbb{Z}_+ : m \geqslant n\}$. 证明:

$$\tau = \{A_n : n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\varnothing\}$$

是正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 上的拓扑.

2.1.2　设 X 是一个集合. 令

$$\tau = \{\varnothing\} \cup \{U \subset X : X - U \text{ 是可数集}\}.$$

验证: τ 是 X 上的拓扑. 它称为 X 的*可数补拓扑*, (X, τ) 称为*可数补空间*.

2.1.3　设 $X = \{a, b, c\}$. 令

$$\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}, \quad \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

求出包含着 τ_1 和 τ_2 的最粗的拓扑, 以及包含于 τ_1 和 τ_2 的最细的拓扑.

2.1.4　设 $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是集合 X 上的一族拓扑, 其中 $J \neq \varnothing$.

(1) 证明: $\bigcap\limits_{\alpha \in J} \tau_\alpha$ 是 X 上包含于所有 τ_α 的最细的拓扑;

(2) $\bigcup\limits_{\alpha \in J} \tau_\alpha$ 是 X 上的拓扑吗?

2.1.5　证明定理 2.1.3.

2.1.6　设 X, Y 都是拓扑空间, 函数 $f : X \to Y$ 是双射. 证明: f 是同胚当且仅当对每个 $V \subset X$, V 是 X 中的开集 $\Leftrightarrow f(V)$ 是 Y 中的开集. 试问: 若拓扑空间 (X, τ_1) 与拓扑空间 (X, τ_2) 是同胚的, 是否有 $\tau_1 = \tau_2$?

2.2 基

2.1 节给出的拓扑空间的拓扑是用开集刻画的, 更多的时候只需要研究它的部分 “开集”, 而这部分 “开集” 同样可以确定拓扑空间的拓扑. 这就是本节要讨论的拓扑的基, 它对空间拓扑的描述、函数连续性的刻画等起简化的作用.

定义 2.2.1 设 X 是一个集合, $\mathscr{B}$ 是 X 的子集族. 如果 $\mathscr{B}$ 满足以下条件:

(B1) 对每个 $x \in X$, 存在 $B \in \mathscr{B}$, 使 $x \in B$;

(B2) 对任意 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, 若 $x \in B_1 \cap B_2$, 则存在 $B_3 \in \mathscr{B}$, 使 $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$,

那么称 $\mathscr{B}$ 为集合 X 上的某拓扑的一个*基*, 简称 $\mathscr{B}$ 是集合 X 的*拓扑基*或*基*.

条件 (B1) 等价于 $X = \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} B$. 如果集族 $\mathscr{B}$ 中任意两个元的交集仍在 $\mathscr{B}$ 中, 则条件 (B2) 成立.

如何从拓扑基生成拓扑? 定理 2.1.1 给我们直接的启示. 如果集族 $\mathscr{B}$ 是集合 X 的拓扑基, 令

$$\tau = \{U \subset X: \text{ 对任意 } x \in U, \text{ 存在 } B \in \mathscr{B}, \text{ 使 } x \in B \subset U\}, \tag{2.2.1}$$

则 τ 是 X 上的拓扑 (下面验证), 称为由 $\mathscr{B}$ *生成的拓扑*, $\mathscr{B}$ 称为拓扑 τ 的基.

验证 τ 是 X 上的拓扑, 即 τ 满足定义 2.1.1 的条件 (O1) $\sim$ (O3).

(O1) 显然, $\varnothing \in \tau$. 由 (B1), 有 $X \in \tau$.

(O2) 设 $U_1,\ U_2 \in \tau$. 如果 $x \in U_1 \cap U_2$, 则存在 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, 使 $x \in B_1 \subset U_1$ 且 $x \in B_2 \subset U_2$. 由于 $x \in B_1 \cap B_2$, 根据 (B2), 存在 $B_3 \in \mathscr{B}$, 使 $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$, 从而 $x \in B_3 \subset U_1 \cap U_2$. 因此, $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

(O3) 设 $\tau_1 \subset \tau$. 如果 $x \in \bigcup\limits_{U \in \tau_1} U$, 则存在 $U \in \tau_1$ 使 $x \in U$. 根据 τ 的定义, 存在 $B \in \mathscr{B}$ 使 $x \in B \subset U$, 于是 $x \in B \subset \bigcup\limits_{U \in \tau_1} U$. 从而, $\bigcup\limits_{U \in \tau_1} U \in \tau$.

注意到 $\mathscr{B} \subset \tau$, 即 $\mathscr{B}$ 的每个元素是拓扑空间 (X, τ) 中的开集, 所以有时也称拓扑空间的基为*开基*.

例 2.2.1 若 X 是一个集合, 则 $\mathscr{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ 是 X 上离散拓扑的基.

例 2.2.2 在平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 记 $B(p, \varepsilon)$ 为以点 $p \in \mathbb{R}^2$ 为圆心、$\varepsilon > 0$ 为半径的*圆形域* (圆的内部). 集族

$$\mathscr{B} = \{B(p, \varepsilon) : p \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$$

满足定义 2.2.1 中的两个条件, 它生成 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑. 这个拓扑称为 $\mathbb{R}^2$ 上的*通常拓扑*.

下面的引理给出了由基生成拓扑的另一种描述方法.

引理 2.2.1　设 X 是一个集合. 若 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑 τ 的基, 则 τ 是由所有可以表示为 $\mathscr{B}$ 的某些元素的并的集合组成的族, 即 $\tau = \left\{ \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}'} B : \mathscr{B}' \subset \mathscr{B} \right\}$.

证明　因为 $\mathscr{B} \subset \tau$, 所以对每个 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$, 有 $\bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}'} B \in \tau$. 反之, 任意 $U \in \tau$, 由基 $\mathscr{B}$ 生成拓扑 τ 的定义, 对每个 $x \in U$, 存在 $B_x \in \mathscr{B}$ 使 $x \in B_x \subset U$. 于是 $U = \bigcup\limits_{x \in U} B_x$. 记 $\mathscr{B}' = \{B_x : x \in U\}$, 则 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ 且 $U = \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}'} B$. □

引理 2.2.1 表明, X 中的每个开集都可以表示为某些基元素的并. 由基生成拓扑已经给出了两种不同的描述方法. 反过来, 也可以由拓扑找出生成它的基.

定理 2.2.1　设 (X, τ) 是拓扑空间. 若 $\mathscr{B} \subset \tau$, 则 $\mathscr{B}$ 是 τ 的基当且仅当对任意的 $U \in \tau$ 及 $x \in U$, 存在 $B \in \mathscr{B}$ 使 $x \in B \subset U$.

证明　只要证明充分性. 首先证明 $\mathscr{B}$ 满足定义 2.2.1 的两个条件. 因为 $X \in \tau$, 由假设, 对每个 $x \in X$, 存在 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B \subset X$, 即 (B1) 成立. 设 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$. 因为 $B_1, B_2 \in \tau$, 所以 $B_1 \cap B_2 \in \tau$, 由假设, 存在 $B_3 \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. 因而, (B2) 成立.

再证明 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑是 τ. 设 τ' 是由基 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑. 由于 $\mathscr{B} \subset \tau$ 且 τ 是 X 的拓扑, 根据引理 2.2.1 和定义 2.1.1 的 (O3), 有 $\tau' \subset \tau$. 另一方面, 设 $U \in \tau$, 由假设, 如果 $x \in U$, 则存在 $B \in \mathscr{B}$, 使得 $x \in B \subset U$. 由式 (2.2.1), $U \in \tau'$. 因而 $\tau \subset \tau'$. 这就表明 $\tau' = \tau$. □

由此, U 是拓扑空间 X 的开集当且仅当对任意的 $x \in U$, 存在 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B \subset U$.

利用拓扑基, 可以判定一个集合是否为开集, 自然地也可以判定拓扑的粗细.

定理 2.2.2　设 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 分别是集合 X 的拓扑 τ 和 τ' 的基. 下列条件等价:

(1) τ' 细于 τ, 即 $\tau \subset \tau'$;

(2) 如果 $B \in \mathscr{B}$ 且 $x \in B$, 则存在 $B' \in \mathscr{B}'$ 使得 $x \in B' \subset B$.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 设 τ' 细于 τ. 如果 $x \in B \in \mathscr{B}$, 则 $B \in \tau$, 于是 $B \in \tau'$. 由于 $\mathscr{B}'$ 生成拓扑 τ', 存在 $B' \in \mathscr{B}'$ 使得 $x \in B' \subset B$.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设条件 (2) 成立. 对每个 $U \in \tau$, 取 $x \in U$. 由于 $\mathscr{B}$ 生成拓扑 τ, 存在 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B \subset U$. 由条件 (2), 存在 $B' \in \mathscr{B}'$ 使得 $x \in B' \subset B$, 于是 $x \in B' \subset U$. 又由于 $\mathscr{B}'$ 生成拓扑 τ', 所以 $U \in \tau'$, 即 $\tau \subset \tau'$. □

由此, 若 $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$, 则 $\tau \subset \tau'$.

由定理 2.2.2 可获得由不同基生成同一拓扑的等价条件.

下列例子进一步说明用基来描述拓扑的便利.

例 2.2.3　若 $\mathscr{B}'$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中的所有矩形域 (矩形的内部) 的族, 其中每个矩形的边都平行于坐标轴, 则 $\mathscr{B}'$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中拓扑的基. 由定理 2.2.2, 由这基生成的拓扑

就是 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑 (见例 2.2.2), 见图 2.2.1.

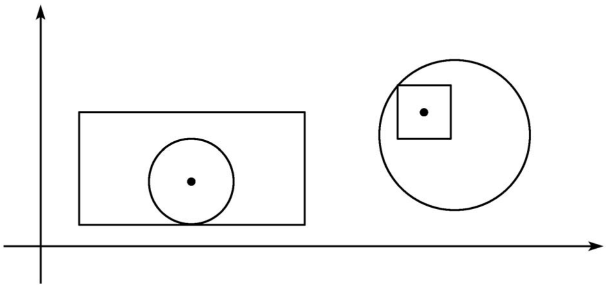


图 2.2.1

例 2.2.4　实数集 $\mathbb{R}$ 上的三个拓扑.

(1) 若 $\mathscr{B}=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$, 其中 $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$, 则 $\mathscr{B}$ 满足定义 2.2.1. 由 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的**通常拓扑**, 记为 τ. 拓扑空间 $(\mathbb{R},\ \tau)$ 常简记为实空间 $\mathbb{R}$.

(2) 若 $\mathscr{B}_1=\{[a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$, 其中 $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\leqslant x<b\}$, 则 $\mathscr{B}_1$ 满足定义 2.2.1. 由 $\mathscr{B}_1$ 生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的**下限拓扑**或**右半开区间拓扑**, 记为 τ_l. 拓扑空间 $(\mathbb{R},\ \tau_l)$ 称为**下限拓扑空间**, 常简记为 $\mathbb{R}_l$. $\mathbb{R}_l$ 也称为 Sorgenfrey **直线**.

(3) 若 $\mathscr{B}_2=\mathscr{B}\cup\{(a,b)-K:a,b\in\mathbb{R}\}$, 其中 $K=\{1/n:n\in\mathbb{Z}_+\}$, 则 $\mathscr{B}_2$ 满足定义 2.2.1. 由 $\mathscr{B}_2$ 生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 上的 K **拓扑**或 Smirnov **删除序列拓扑**, 记为 τ_K. 拓扑空间 $(\mathbb{R},\ \tau_K)$ 称为 Smirnov **删除序列空间**, 常简记为 $\mathbb{R}_K$.

实数集上的下限拓扑 τ_l 与 K 拓扑 τ_K 都严格细于通常拓扑 τ, 而下限拓扑 τ_l 与 K 拓扑 τ_K 不可比较 (见习题 2.2.2).

(a) 下限拓扑 τ_l 严格细于通常拓扑 τ. 如果 $(a,b)\in\mathscr{B}$ 且 $x\in(a,b)$, 则 $[x,b)\in\mathscr{B}_1$ 且 $x\in[x,b)\subset(a,b)$. 由定理 2.2.2, τ_l 细于 τ. 另一方面, 对 $a\in[a,b)\in\mathscr{B}_1$, 不存在 $\mathscr{B}$ 的元素 (x,y), 使 $a\in(x,y)\subset[a,b)$. 因此, τ_l 严格细于 τ.

(b) K 拓扑 τ_K 严格细于通常拓扑 τ. 因为 $\mathscr{B}\subset\mathscr{B}_2$, 由定理 2.2.2, τ_K 细于 τ. 另一方面, 取 $U=(-1,1)-K$, 则 $0\in U\in\mathscr{B}_2$, 不存在 $B\in\mathscr{B}$ 使 $0\in B\subset U$. 因此, τ_K 严格细于 τ.

(c) 若函数 $f:\mathbb{R}_l\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}_l$, 则 f 是连续的双射, 但 f^{-1} 不是连续的. 因为 $[0,1)$ 是 $\mathbb{R}_l$ 中的开集, 而不是 $\mathbb{R}$ 中的开集.

下面介绍序拓扑. 设 $(X,\ <)$ 是全序集. 对 $a,b\in X$ 且 $a<b$, 记

$$(a,b)=\{x\in X:a<x<b\},$$
$$[a,b]=\{x\in X:a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$[a,b)=\{x\in X:a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\in X: a<x\leqslant b\},$$

它们都称为由 a 和 b 确定的**区间**, 其中 (a,b) 称为 X 的**开区间**, $[a,b]$ 称为 X 的**闭区间**, $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 称为 X 的**半开区间** 或**半闭区间**. 记

X 的**开射线**为 $(-\infty,a)=\{x\in X: x<a\}$, $(a,+\infty)=\{x\in X: a<x\}$;

X 的**闭射线**为 $(-\infty,a]=\{x\in X: x\leqslant a\}$, $[a,+\infty)=\{x\in X: a\leqslant x\}$.

如果 X 有最小元 a_0, 则 $(-\infty,a)=[a_0,a)$; 如果 X 有最大元 b_0, 则 $(a,+\infty)=(a,b_0]$. 对通常序关系的实数集 $\mathbb{R}$, 有时射线仍称为 (无限) 区间.

例 2.2.5　序拓扑空间.

设 X 是全序集且至少含有两个元素, X 的下述类型的子集组成的集族记为 $\mathscr{B}$:

(1) X 的所有开区间 (a,b);

(2) 如果 X 有最小元 a_0, 所有形如 $[a_0,b)$ 的区间;

(3) 如果 X 有最大元 b_0, 所有形如 $(a,b_0]$ 的区间.

容易验证, $\mathscr{B}$ 是 X 的某个拓扑的基. 由 $\mathscr{B}$ 生成的 X 上的拓扑称为 X 的**序拓扑**. 全序集 (良序集) 赋予序拓扑称为**序拓扑空间** (**良序空间**).

在例 2.2.4 的 (1) 中, 给出 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑, 恰好就是由 $\mathbb{R}$ 中的通常序关系给出的序拓扑.

例 2.2.6　集 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 在字典序 $<$ 下是全序集. 设 $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 则

$$x<y\Leftrightarrow x_1<y_1,\ \text{或}\ x_1=y_1,\ x_2<y_2.$$

$(\mathbb{R}^2,\ <)$ 既无最大元, 也无最小元. 于是 $\mathbb{R}^2$ 上的序拓扑有由形如 (x,y) 的所有开区间的族组成的基, 见图 2.2.2. 易验证, 集族

$$\{(x,y): x=(a_1,b_1),\ y=(a_1,b_2)\in\mathbb{R}^2,\ b_1<b_2\}$$

也是 $\mathbb{R}^2$ 上序拓扑的基.

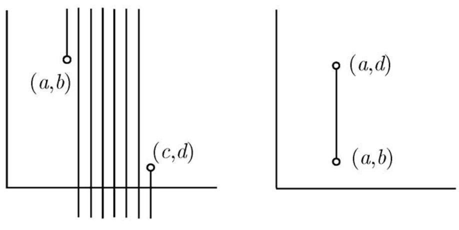


图 2.2.2

如果集合 X 的子集族 $\mathscr{S}$ 的并等于 X, 让 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{S}$ 中任意有限个元素的交集

构成的集族, 即

$$\mathscr{B}=\left\{\bigcap_{S\in\mathscr{S}_0}S:\mathscr{S}_0\text{ 是 }\mathscr{S}\text{ 的有限子族}\right\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是 X 的某个拓扑的基. 事实上, 因为 $\mathscr{S}\subset\mathscr{B}$, 且 $X=\bigcup_{S\in\mathscr{S}}S$, 所以 $X=\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B$, 于是定义 2.2.1 中的 (B1) 成立. 设 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$, 记

$$B_1=\bigcap_{i=1}^{n}S_{1i},\ B_2=\bigcap_{j=1}^{m}S_{2j},\ \text{其中 } S_{1i},S_{2j}\in\mathscr{S},1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m.$$

那么

$$B_1\cap B_2=\left(\bigcap_{i=1}^{n}S_{1i}\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m}S_{2j}\right)\in\mathscr{B},$$

所以 (B2) 成立.

定义 2.2.2 设 X 是一个集合, $\mathscr{S}$ 是 X 的子集族. 如果 $X=\bigcup_{S\in\mathscr{S}}S$, 则称集族 $\mathscr{S}$ 为 X 的某个拓扑的*子基*; 令

$$\mathscr{B}=\left\{\bigcap_{S\in\mathscr{S}_0}S:\mathscr{S}_0\text{ 是 }\mathscr{S}\text{ 的有限子族}\right\},$$

由基 $\mathscr{B}$ 生成的 X 的拓扑称为*由子基 $\mathscr{S}$ 生成的拓扑*.

上述定义表明, 通过取 $\mathscr{S}$ 的元素的有限交的集族 $\mathscr{B}$ 得到 X 的某个拓扑基, 再由 $\mathscr{B}$ 生成 X 上的拓扑 τ. 因而, $\mathscr{S}\subset\mathscr{B}\subset\tau$.

易验证, 实数集 $\mathbb{R}$ 的子集族

$$\mathscr{S}=\{(-\infty,b):b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,+\infty):a\in\mathbb{R}\}$$

是 $\mathbb{R}$ 上通常拓扑的子基. 因为 $\mathbb{R}$ 的每个开区间 $(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,+\infty)$, 所以 $\mathscr{S}$ 生成 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑.

利用基和子基给函数连续以较简单的刻画.

定理 2.2.3 设 X 和 Y 都是拓扑空间, 函数 $f:X\to Y$. 下列条件等价:

(1) f 连续;

(2) Y 有子基 $\mathscr{S}$, 使得对每个 $S\in\mathscr{S}$, $f^{-1}(S)$ 是 X 中的开集;

(3) Y 有基 $\mathscr{B}$, 使得对每个 $B\in\mathscr{B}$, $f^{-1}(B)$ 是 X 中的开集.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 f 连续. 因为 Y 的拓扑自身是 Y 的子基, 所以 (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\mathscr{S}$ 是 Y 的拓扑的子基, 满足 (2). 令

$$\mathscr{B}=\left\{\bigcap_{S\in\mathscr{S}_0}S:\mathscr{S}_0\text{ 是 }\mathscr{S}\text{ 的有限子族}\right\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是 Y 的拓扑基. 对每个 $B \in \mathscr{B}$, 存在 $\mathscr{S}$ 的有限子族 $\mathscr{S}_0$, 使 $B = \bigcap_{S \in \mathscr{S}_0} S$, 因而 $f^{-1}(B) = \bigcap_{S \in \mathscr{S}_0} f^{-1}(S)$ 是 X 中有限个开集的交, 所以 $f^{-1}(B)$ 是 X 中的开集.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathscr{B}$ 是 Y 的拓扑的基, 满足 (3). 对 Y 中的每个开集 U, 由引理 2.2.1, 存在 $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$ 使得 $U = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_0} B$. 因而 $f^{-1}(U) = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_0} f^{-1}(B)$ 是 X 中一族开集的并, 所以 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集. 这就证明了 f 的连续性. □

与基的概念类似, 给出邻域基的概念.

定义 2.2.3 设 X 是拓扑空间, $x \in X$, 记 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系. 如果 $\mathscr{V}_x \subset \mathscr{U}_x$ 满足: 对每个 $U \in \mathscr{U}_x$, 存在 $V \in \mathscr{V}_x$, 使得 $V \subset U$, 则称 $\mathscr{V}_x$ 是 x 的*邻域基*; 当 $\mathscr{V}_x$ 的元素都是 X 的开集时, $\mathscr{V}_x$ 称为 x 的*开邻域基*或*局部基*.

若 X 是离散拓扑空间, 则对每个 $x \in X$, $\mathscr{V}_x = \{\{x\}\}$ 是 x 的局部基.

与定理 2.1.2 相类似, 拓扑空间 X 的邻域基 $\mathscr{V}_x$ $(\forall\, x \in X)$ 有下列性质:

(NB1) $\mathscr{V}_x \neq \varnothing$;

(NB2) 如果 $V \in \mathscr{V}_x$, 则 $x \in V$;

(NB3) 如果 $U, V \in \mathscr{V}_x$, 则存在 $W \in \mathscr{V}_x$, 使得 $W \subset U \cap V$;

(NB4) 如果 $U \in \mathscr{V}_x$, 则存在集 V, 使得 $x \in V \subset U$ 且对每个 $y \in V$, 存在 $W \in \mathscr{V}_y$ 有 $W \subset V$.

应用邻域基可代替定理 2.1.3 中的邻域系生成集合上的拓扑, 即

设 X 是一个集合. 如果对每个 $x \in X$ 都对应 X 的子集族 $\mathscr{V}_x$, 满足条件 (NB1)~(NB4), 则集族

$$\mathscr{U}_x = \{U \subset X: \text{ 存在 } V \in \mathscr{V}_x \text{ 使 } V \subset U\}$$

满足定理 2.1.2 的条件 (N1) ~ (N5). 由定理 2.1.3, $\mathscr{U}_x$ $(\forall\, x \in X)$ 生成 X 上的拓扑. 这拓扑以 $\mathscr{U}_x$ 为 x 的邻域系、以 $\mathscr{V}_x$ 为 x 的邻域基.

对每一 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$\mathscr{V}_x = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\},$$

则 $\mathscr{V}_x$ 满足条件 (NB1) ~ (NB4), 所以 $\mathscr{V}_x$ $(\forall\, x \in X)$ 生成 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑.

例 2.2.7 Niemytzki 半平面.

设 $L = \{(x, y) : y \geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的上半平面. 记

$$L_1 = \{(x, y) \in L : y = 0\}, \quad L_2 = \{(x, y) \in L : y > 0\}.$$

对每一 $p \in L$, 置

$$\mathscr{V}_p = \begin{cases} \{B(p, \varepsilon) \cap L : \varepsilon > 0\}, & p \in L_2, \\ \{B(p', \varepsilon) \cup \{p\} : \varepsilon > 0\}, & p \in L_1, \end{cases}$$

这里当 $p=(x,0)\in L_1$ 时, $p'=(x,\varepsilon)$, 所以 $B(p',\varepsilon)$ 是 L_2 中与 L_1 相切于点 p 的开圆域, 见图 2.2.3. $\mathscr{V}_p$ 满足条件 (NB1) $\sim$ (NB4), 由 $\mathscr{V}_p$ $(\forall p\in L)$ 生成 L 上的拓扑称为 Niemytzki *切圆盘拓扑*, 具有这种拓扑的拓扑空间称为 Niemytzki *半平面*.

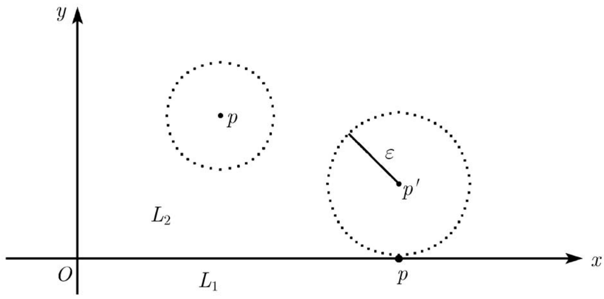


图 2.2.3

利用邻域基来刻画函数在一点的连续性是很自然的.

定理 2.2.4 设 X 和 Y 都是拓扑空间, 函数 $f:X\to Y$. 若 $x\in X$, 则 f 在点 x 连续当且仅当 $f(x)$ 有邻域基 $\mathscr{V}_{f(x)}$, 使得对任意 $V\in\mathscr{V}_{f(x)}$, $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域.

证明 设 f 在 x 连续, 因为 $f(x)$ 的邻域系自身就是 $f(x)$ 的邻域基, 所以结论成立. 反之, 设 $\mathscr{V}_{f(x)}$ 是 $f(x)$ 的邻域基, 满足假设条件. 对 $f(x)$ 的每个邻域 U, 存在 $V\in\mathscr{V}_{f(x)}$ 使得 $V\subset U$, 因而 $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(U)$. 由假设, $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域, 所以 $f^{-1}(U)$ 也是 x 的邻域. 这表明 f 在点 x 连续. □

习 题 2.2

2.2.1 证明实数集 $\mathbb{R}$ 有拓扑 τ 以集族 $\{(a,+\infty):a\in\mathbb{R}\}$ 为基, 并将 τ 明确地表示出来. 实数集 $\mathbb{R}$ 的这个拓扑 τ 通常称为*右手拓扑*.

2.2.2 证明: $\mathbb{R}$ 上的下限拓扑 τ_l 与 K 拓扑 τ_K 不可比较.

2.2.3 证明集族 $\{[a,+\infty):a\in\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,b]:b\in\mathbb{R}\}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的某个拓扑的子基, 并说明这个拓扑的特点.

2.2.4 全序集 X 的开射线的全体

$$\mathscr{S}=\{(-\infty,b):b\in X\}\cup\{(a,+\infty):a\in X\}$$

是 X 上序拓扑的子基.

2.2.5 设 $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是集合 X 上的一族拓扑, 其中 $J\neq\varnothing$. 证明:

(1) 集族 $\bigcup\limits_{\alpha\in J}\tau_\alpha$ 是 X 的某个拓扑 τ 的子基;

(2) τ 是 X 上包含所有 τ_α 的最粗的拓扑.

2.2.6 集 $X=\{0,1\}\times\mathbb{Z}_+$ 赋予字典序的序拓扑. 给出 X 中每一点的一个邻域基.

2.2.7 证明: 拓扑空间 X 的每一点 x 的邻域基 $\mathscr{V}_x$ $(\forall\, x\in X)$ 具有性质 (NB1) $\sim$ (NB4).

2.3 闭包、内部与边界

开集是拓扑空间的子集中最重要的角色. 拓扑空间中还有不少特殊的子集也起着本质的作用.

定义 2.3.1 设 X 是拓扑空间, $A \subset X$. 如果 $X - A$ 是 X 的开集, 则称 A 是 X 的闭集.

对任意空间 X, $\varnothing$ 和 X 都是既开且闭的集合. 离散空间 (见例 2.1.1) 中的每个子集是既开且闭的集合. 有限补空间 (见例 2.1.3) 中的每个有限集是闭集. 实空间 $\mathbb{R}$ (见例 2.2.4 (1)) 中的闭区间 $[a, b]$, 整数集 $\mathbb{Z}$ 都是闭集.

由定义 2.3.1, $U \subset X$ 是开集当且仅当 $X - U$ 是闭集. 由定义 2.1.1 及 de Morgan 公式可得闭集的性质, 并获得生成拓扑的闭集条件.

定理 2.3.1 若 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 的所有闭集构成的集族, 则

(F1) $\varnothing$, $X \in \mathscr{F}$;

(F2) 如果 F_1, $F_2 \in \mathscr{F}$, 则 $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$;

(F3) 如果 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ 且 $\mathscr{F}_0 \neq \varnothing$, 则 $\bigcap_{F \in \mathscr{F}_0} F \in \mathscr{F}$.

反之, 若集合 X 的子集族 $\mathscr{F}$ 满足条件 (F1) $\sim$ (F3), 置

$$\tau = \{U \subset X : X - U \in \mathscr{F}\},$$

则 τ 是 X 上的拓扑, 且 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 (X, τ) 中的全体闭集族.

拓扑空间的子集不都是闭集, 我们对于由一个集产生包含它的最小闭集比较感兴趣.

定义 2.3.2 设 X 是拓扑空间, $A \subset X$. 包含着 A 的所有闭集的交称为 A 的闭包, 记作 $\overline{A}$, A^- 或 $\mathrm{cl}A$, 即

$$\overline{A} = \cap\{F : F \text{ 是 } X \text{ 的闭集且 } A \subset F\}.$$

由定义及 (F3), 对 A, B, $U \subset X$,

(1) $\overline{A}$ 是包含着 A 的最小闭集;

(2) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;

(3) A 是闭集 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$;

(4) U 是开集 $\Leftrightarrow \overline{X - U} = X - U$.

闭包的本质性质由下述定理揭示.

定理 2.3.2 设 X 是拓扑空间. 若 A, $B \subset X$, 则

(C1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;

(C2) $A \subset \overline{A}$;

(C3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(C4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

证明　(C1) 与 (C2) 可由定义 2.3.2 直接推出. 由 $\overline{A}$ 是闭集知 (C4) 成立.

因为 $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$, 及 $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, 所以 $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. 另一方面, 由于 $\overline{A} \cup \overline{B}$ 是包含 $A \cup B$ 的闭集, 于是 $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. (C3) 得证. □

条件 (C1) $\sim$ (C4) 称为 Kuratowski **闭包公理**或**闭包公理**.

定理 2.3.3　设 X 是拓扑空间. 若 $A \subset X$, $x \in X$, 则 $x \in \overline{A}$ 当且仅当 x 的每个邻域 U 都与 A 相交.

证明　设点 x 的邻域 U 与 A 不交, 不妨设 U 是开集, 从而 $X - U$ 是包含 A 的闭集, 故有 $X - U \supset \overline{A}$, 从而 $x \notin \overline{A}$. 相反地, 如 $x \notin \overline{A}$, 则 $X - \overline{A}$ 是点 x 的邻域与 A 不交. □

推论 2.3.1　设 A 与 U 是拓扑空间 X 中不相交的子集. 如果 U 是 X 的开集, 则 $\overline{A} \cap U = \varnothing$.

证明　若存在 $x \in \overline{A} \cap U$, 则 U 是点 x 的邻域, 由定理 2.3.3, U 与 A 相交, 矛盾. □

定义 2.3.3　设 X 是拓扑空间, $A \subset X$, $x \in X$. 如果对 x 的任意邻域 U, 都有 $U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$, 则称 x 为 A 的**聚点**.

A 的所有聚点的集合称为 A 的**导集**, 记为 A^d. $A - A^d$ 中的点称为 A 的**孤立点**.

由定理 2.3.3, $x \in A^d \Leftrightarrow x \in \overline{A - \{x\}}$.

设 $\mathbb{R}$ 为实空间. 如果 $A = (0, 1]$, $K = \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, 则 $A^d = [0, 1]$, $K^d = \{0\}$, $\mathbb{Z}^d = \varnothing$, 且 $\mathbb{Q}^d = \mathbb{R}$.

例 2.3.1　在良序空间 $[0, \omega_1]$ 中, ω_1 是 $[0, \omega_1)$ 的聚点, $\overline{[0, \omega_1)} = [0, \omega_1]$.

对 ω_1 在 $[0, \omega_1]$ 中的任意邻域 U, 由例 2.2.5, 存在 $\alpha < \omega_1$ 使得 $\omega_1 \in (\alpha, \omega_1] \subset U$. 由于 α 的紧接后元 $\alpha^+ \in (\alpha, \omega_1] \cap (0, \omega_1)$, 所以 $U \cap (0, \omega_1) \neq \varnothing$. 因此, ω_1 是 $[0, \omega_1)$ 的聚点, $\omega_1 \in \overline{[0, \omega_1)}$. 从而, $\overline{[0, \omega_1)} = [0, \omega_1]$.

定理 2.3.4　设 X 是拓扑空间. 若 $A \subset X$, 则 $\overline{A} = A \cup A^d$.

证明　显然, $A \subset \overline{A}$. 设 $x \in A^d$, 由定义 2.3.3, $x \in \overline{A - \{x\}} \subset \overline{A}$, 因而 $A \cup A^d \subset \overline{A}$. 另一方面, 设 $x \notin A \cup A^d$, 则 $A = A - \{x\}$ 且 $x \notin \overline{A - \{x\}} = \overline{A}$, 所以 $\overline{A} \subset A \cup A^d$. 故 $\overline{A} = A \cup A^d$. □

推论 2.3.2　设 X 是拓扑空间. 若 $A \subset X$, 则 A 是闭集当且仅当 $A^d \subset A$.

利用闭集和闭包, 同样可以刻画函数的连续性.

定理 2.3.5　设 X 和 Y 都是拓扑空间, 函数 $f : X \to Y$. 下列条件等价:

(1) f 连续;

(2) 对 X 中每个子集 A, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(3) Y 中每个闭集 F 的原像 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 f 连续, $A \subset X$. 往证若 $x \in \overline{A}$, 则 $f(x) \in \overline{f(A)}$. 设 U 是 $f(x)$ 的任意邻域, 由定理 2.1.6 和定义 2.1.5, $f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域. 根据定理 2.3.3, $f^{-1}(U) \cap A \neq \varnothing$. 由习题 1.1.2 的 (1), $U \cap f(A) \neq \varnothing$. 于是, $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 F 是 Y 的闭集, $A = f^{-1}(F)$. 往证 A 是闭集, 即证 $\overline{A} \subset A$. 易知, $f(A) = f(f^{-1}(F)) \subset F$. 由 (2), $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset F$. 因而, $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 U 是 Y 中的开集, 则 $B = Y - U$ 是 Y 中的闭集. 由于 $f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - U) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(U) = X - f^{-1}(U)$, 根据假设, $f^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集, 所以 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集. 故 f 连续. □

以上讨论的闭包是与闭集紧密相关的, 下面将讨论与开集相关的集合的内部概念, 即由一个集产生它所包含的最大开集.

定义 2.3.4 设 X 是拓扑空间, $A \subset X$. 包含在 A 中的所有开集的并称为 A 的**内部**, 记作 A°, $\mathring{A}$ 或 $\mathrm{int}A$, 即

$$A^\circ = \cup\{U : U \text{ 是 } X \text{ 的开集且 } U \subset A\}.$$

由定义及 (O3), 对 $A, B, F \subset X$,

(1) A° 是含在 A 中的最大开集;

(2) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$;

(3) A 是开集 $\Leftrightarrow A = A^\circ$;

(4) F 是闭集 $\Leftrightarrow X - F = (X - F)^\circ$.

下面的定理给出了内部与闭包之间的关系.

定理 2.3.6 设 X 是拓扑空间. 若 $A \subset X$, 则

(1) $A^\circ = X - \overline{X - A}$;

(2) $\overline{A} = X - (X - A)^\circ$.

证明 由于 $X - A \subset \overline{X - A}$, 从而 $X - \overline{X - A} \subset X - (X - A) = A$. 因为 $X - \overline{X - A}$ 是开集, 所以 $X - \overline{X - A} \subset A^\circ$. 另一方面, 由于 $X - A \subset X - A^\circ$ 且 $X - A^\circ$ 是闭集, 所以 $\overline{X - A} \subset X - A^\circ$, 从而 $A^\circ \subset X - \overline{X - A}$. (1) 得证.

由 (1), $(X - A)^\circ = X - \overline{X - (X - A)} = X - \overline{A}$, 所以 $\overline{A} = X - (X - A)^\circ$. □

例 2.3.2 实空间 $\mathbb{R}$ 中的无理数集不是 $\mathbb{R}$ 中可数个闭子集的并集.

由于有理数集是可数集, 若 $\mathbb{R}$ 中的无理数集可表示为 $\mathbb{R}$ 中可数个闭子集的并, 则 $\mathbb{R}$ 是可数个闭集 $\{F_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 之并, 其中每一 F_n 或者是有理数的子集, 或者是无理数的子集. 这时 $F_n^\circ = \varnothing$, 由定理 2.3.6, $\overline{\mathbb{R} - F_n} = \mathbb{R}$, 再由推论 2.3.1 及定义 2.3.1, 对 $\mathbb{R}$ 的非空开集 U, $U \cap (\mathbb{R} - F_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 的非空开集.

记开区间 $(0,1)=V_1$. 由于 $V_1\cap(\mathbb{R}-F_1)$ 是非空开集, 存在开区间 V_2 使得闭区间 $\overline{V}_2\subset V_1\cap(\mathbb{R}-F_1)$ 且开区间 V_2 的长度不超过 1/2. 继续这种方法, 可得到开区间列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 满足:

$$\overline{V}_{n+1}\subset V_n\cap(\mathbb{R}-F_n),\quad V_n \text{ 的长度不超过 } 1/n,\ n\in\mathbb{Z}_+.$$

从而 $\{\overline{V}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的退缩闭区间套, 存在点 $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\overline{V}_n\subset\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}(\mathbb{R}-F_n)=\varnothing$, 矛盾. 所以无理数集不是 $\mathbb{R}$ 中可数个闭子集的并集.

拓扑空间中与闭包及内部相联系的概念是边缘.

定义 2.3.5 设 X 是拓扑空间, $A\subset X$. 集合 $\overline{A}\cap\overline{X-A}$ 称为集合 A 的**边缘**, 记作 ∂A. 点 $x\in\partial A$ 称为集合 A 的**边缘点**.

由此, $\partial A=\partial(X-A)$ 是闭集. 由定理 2.3.3, 点 $x\in\partial A$ 当且仅当对 x 的任意邻域 U, U 中既有 A 中的点又有 $X-A$ 中的点.

下面是有关边缘的一些性质, 更多的性质在习题 2.3 中.

定理 2.3.7 设 X 是拓扑空间. 若 $A,\ B\subset X$, 则

(1) $\partial A=\overline{A}-A^\circ$;

(2) $A^\circ=A-\partial A$;

(3) $\partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B$.

证明 (1) 由定义 2.3.5 及定理 2.3.6, $\partial A=\overline{A}\cap\overline{X-A}=\overline{A}\cap(X-A^\circ)=\overline{A}-A^\circ$.

(2)

$$\begin{aligned}A-\partial A&=A-(\overline{A}\cap\overline{X-A})=(A-\overline{A})\cup(A-\overline{X-A})\\&=A-\overline{X-A}=A\cap A^\circ=A^\circ.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\partial(A\cup B)&=\overline{A\cup B}\cap\overline{X-(A\cup B)}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{(X-A)\cap(X-B)}\\&\subset(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{X-A}\cap\overline{X-B})\subset(\overline{A}\cap\overline{X-A})\cup(\overline{B}\cap\overline{X-B})\\&=\partial A\cup\partial B.\end{aligned}$$

□

习 题 2.3

2.3.1 证明定理 2.3.1.

2.3.2 (导集的性质) 设 X 是拓扑空间. 若 $A,\ B\subset X$, 证明:

(1) $A\subset B\Rightarrow A^d\subset B^d$;

(2) $(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$;

(3) $(A^d)^d\subset A\cup A^d$.

2.3.3 设 X 和 Y 都是拓扑空间, 函数 $f:X\to Y$. 证明下列条件等价:

(1) f 连续;

(2) 对 Y 中每个子集 B, $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$;

(3) 对 Y 中每个子集 B, $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$.

2.3.4 (内部的性质)　设 X 是拓扑空间. 若 $A,\ B \subset X$, 证明:

(1) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;

(2) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

2.3.5　设 X 是拓扑空间, $A \subset X$, $x \in X$. 如果 A 是点 x 的邻域, 则称 x 是 A 的**内点**. 证明: $A^\circ = \{x \in X:\ x \text{ 是 } A \text{ 的内点}\}$.

2.3.6　设 X 是拓扑空间, $A \subset X$. 能否定义 A 所包含的最大闭集? 包含 A 的最小开集?

2.3.7 (边缘的性质)　设 X 是拓扑空间. 若 $A,\ B \subset X$, 证明:

(1) $\overline{A} = A \cup \partial A$;

(2) A 是开集, 当且仅当 $\partial A = \overline{A} - A$, 当且仅当 $A \cap \partial A = \varnothing$;

(3) A 是闭集, 当且仅当 $\partial A = A - A^\circ$, 当且仅当 $\partial A \subset A$;

(4) A 是既开且闭的集合当且仅当 $\partial A = \varnothing$;

(5) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$.

2.3.8　设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是拓扑空间 X 的子集族, 其中 $J \neq \varnothing$. 判断下面哪些等号成立. 如果不成立, 判断哪一种包含关系 ($\supset$ 或 $\subset$) 成立.

(1) $\overline{\bigcap\limits_{\alpha \in J} A_\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha}$;

(2) $\overline{\bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha} = \bigcup\limits_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha}$;

(3) $\overline{A_\alpha} - \overline{A_\beta} = \overline{A_\alpha - A_\beta}$,　$\alpha,\ \beta \in J$.

2.3.9　求集合 A 的导集和边缘:

(1) 设 A 是有限补空间 X 中的无限子集;

(2) 设 A 是可数补空间 (见习题 2.1.2) X 中的不可数子集;

(3) 设 A 是实空间 $\mathbb{R}$ 中的无理数集.

2.4　子　空　间

在数学分析中, 常讨论区间上连续函数的性质, 这涉及区间的拓扑. 实直线上的拓扑与区间上的拓扑的关系是本节要介绍的相对拓扑或子空间拓扑. 这是由已知拓扑空间产生新拓扑空间的一种直接、简单的方法.

设 Y 是拓扑空间 (X,τ) 的子集. 置 $\tau|_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$, 则它是集 Y 上的拓扑.

事实上, 因为 $\varnothing = Y \cap \varnothing$, $Y = Y \cap X$, 所以 $\varnothing,\ Y \in \tau|_Y$. 其次, 如果 $A,\ B \in \tau|_Y$, 则存在 $A_1,\ B_1 \in \tau$ 使 $A = Y \cap A_1$, $B = Y \cap B_1$, 因而 $A \cap B = Y \cap (A_1 \cap B_1) \in \tau|_Y$. 最后, 如果 $\tau_0 \subset \tau|_Y$, 不妨设 $\tau_0 \neq \varnothing$, 则对每个 $A \in \tau_0$, 存在 $A' \in \tau$ 使 $A = Y \cap A'$. 于是 $\bigcup\limits_{A \in \tau_0} A = \bigcup\limits_{A \in \tau_0} (Y \cap A') = Y \cap \left(\bigcup\limits_{A \in \tau_0} A'\right) \in \tau|_Y$.

若 $Y \subset X$ 且 $\mathscr{U}$ 是 X 的子集族, 则 $\mathscr{U}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathscr{U}\}$ 称为集族 $\mathscr{U}$ 在 Y 上的限制.

定义 2.4.1 设 Y 是拓扑空间 (X, τ) 的子集, 集族 $\tau|_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$ 称为 Y 上 (关于 τ) 的相对拓扑或子空间拓扑, 拓扑空间 $(Y, \tau|_Y)$ 称为拓扑空间 (X, τ) 的子空间.

对拓扑空间 X 的子集 Y, 除非特殊说明, 当谈到拓扑空间 Y 时, 总指 Y 有子空间拓扑. 定义 2.4.1 表明, 子空间 Y 中的子集 A 是子空间的开集当且仅当 A 是 X 中的开集与 Y 的交. 对 $U \subset Y$, 当说到 U 是 "开集" 时, 一般要明确指出它是 X 的开集还是 Y 的开集.

对 $A \subset Y \subset X$, 约定: $\overline{A}$, A° 与 $\mathrm{cl}_Y A$, $\mathrm{int}_Y A$ 分别表示 A 在 X 与 Y 中的闭包、内部.

定理 2.4.1 设 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的基. 若 $Y \subset X$, 则集族 $\mathscr{B}|_Y = \{B \cap Y : B \in \mathscr{B}\}$ 是 Y 的子空间拓扑的基.

证明 设 τ 是 X 的拓扑. 由 $\mathscr{B} \subset \tau$, $\mathscr{B}|_Y \subset \tau|_Y$. 设任意 $U \in \tau|_Y$ 及 $y \in U$, 则存在 $U_1 \in \tau$, 使得 $U = Y \cap U_1$, 于是 $y \in U_1$. 根据定理 2.2.1, 存在 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $y \in B \subset U_1$. 因而, $B \cap Y \in \mathscr{B}|_Y$ 且 $y \in B \cap Y \subset U_1 \cap Y = U$. 再由定理 2.2.1, $\mathscr{B}|_Y$ 是 Y 的基. □

定理 2.4.2 设 Y 是拓扑空间 X 的子空间. 若 $F \subset Y$, 则

(1) F 是 Y 的闭集当且仅当存在 X 中的闭集 F_1 使得 $F = F_1 \cap Y$;

(2) $\mathrm{cl}_Y F = Y \cap \overline{F}$.

证明 (1) 设 τ 是 X 的拓扑. 如果 F 是 Y 中的闭集, 则 $Y - F \in \tau|_Y$. 因而存在 $U_1 \in \tau$ 使得 $Y - F = Y \cap U_1$. 令 $F_1 = X - U_1$, 则 F_1 是 X 的闭集, 且 $F_1 \cap Y = Y \cap (Y - U_1) = F$.

反过来, 设 X 中的闭集 F_1 使得 $F = Y \cap F_1$, 那么 $Y - F = Y - (Y \cap F_1) = Y \cap (X - F_1)$. 因为 $X - F_1 \in \tau$, 所以 $Y - F \in \tau|_Y$, 从而 F 是 Y 中的闭子集.

(2) 因为 $\overline{F}$ 是 X 中的闭集, 所以 $\overline{F} \cap Y$ 是 Y 中含 F 的闭集, 于是 $\mathrm{cl}_Y F \subset \overline{F} \cap Y$. 另一方面, 由于 $\mathrm{cl}_Y F$ 是 Y 的闭集, 存在 X 中的闭集 F_1 使 $\mathrm{cl}_Y F = F_1 \cap Y$, 于是 $F \subset \mathrm{cl}_Y F \subset F_1$, 从而 $\overline{F} \subset F_1$, 因此 $\overline{F} \cap Y \subset F_1 \cap Y = \mathrm{cl}_Y F$. 故 $\mathrm{cl}_Y F = \overline{F} \cap Y$. □

定理 2.4.3 设 Y 是拓扑空间 X 的子空间, 且 Y 是 X 的开 (闭) 集. 若 $U \subset Y$, 则 U 是 Y 的开 (闭) 集当且仅当 U 是 X 的开 (闭) 集.

证明 仅证明闭集的情形, 开集时是类似的, 留作练习 (见习题 2.4.2).

如果 U 是 Y 的闭集, 由定理 2.4.2, 则存在 X 中的闭集 U_1 使得 $U = U_1 \cap Y$. 由于 Y 是 X 的闭集, 所以 U 是 X 的闭集. 反之, 如果 U 是 X 的闭集, 由定理 2.4.2, 则 $U \cap Y = U$ 是 Y 的闭集. □

例 2.4.1　设 $\mathbb{R}$ 是实空间, 子空间 $Y \subset \mathbb{R}$. 由例 2.2.4 的 (1) 和定理 2.4.1, Y 的子空间拓扑有基

$$\mathscr{B}|_Y = \{(a,b)\cap Y : a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}.$$

(1) 取 $Y=[0,1]$, 当 $0\leqslant a,b\leqslant 1$ 时, $\mathscr{B}|_Y$ 中的元形如 $\varnothing$, (a,b), $(a,1]$ 或 $[0,b)$. 于是集合 $(a,1]$, 或 $[0,b)$ 是 Y 的开集, 但不是实空间 $\mathbb{R}$ 的开集.

子空间 $[0,1]$ 的拓扑解释了为什么数学分析中定义函数在 $[0,1]$ 上的连续性时, 在 0, 1 两点只需要在 0 右连续, 在 1 左连续.

$\mathscr{B}|_Y$ 也是 $Y=[0,1]$ 上 (通常序关系) 序拓扑的基 (见例 2.2.5), 从而它作为 $\mathbb{R}$ 的子空间拓扑与序拓扑是一样的. 但对于一般的 Y 未必总是一样的.

(2) 取 $Y=[0,1)\cup\{2\}$. 因为 $\{2\}=(1,3)\cap Y$, 所以单点集 $\{2\}$ 是子空间 Y 中的开集. 但对于 Y 的序拓扑来说, Y 的序拓扑中包含 2 的基元素, 形如 $(a,2]$, $a\in[0,1)$, 即 $(a,2]=\{x\in Y : a<x\leqslant 2\}$. 在 $(a,2]$ 中必有 $x\in Y$ 且 $x<2$, 所以单点集 $\{2\}$ 相对于 Y 的序拓扑不是开集.

为了避免混淆, 当讨论序拓扑的子集的拓扑时, 若无特别说明, 总是假设已经给了子空间拓扑.

例 2.4.2　设 $\mathbb{R}$ 是实空间, $(-1,1)\subset\mathbb{R}$ 具有子空间拓扑. 令

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2},\quad x\in(-1,1),$$

则 $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ 是同胚 (请自行验证).

下面综合一些与子空间相关的连续函数结果以备后续使用.

定理 2.4.4　设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间, 函数 $f:X\to Y$.

(1) (限制定义域) 如果 f 连续且 Z 是 X 的子空间, 则限制映射 $f|_Z : Z\to Y$ 连续;

(2) (限制值域) 如果 f 连续且 $f(X)\subset Z\subset Y$ (Z 是 Y 的子空间), 则限制 f 的值域而得到的函数 $g:X\to Z$ 连续;

(3) (扩大值域) 如果 f 连续且 $Y\subset Z$ (Y 是 Z 的子空间), 则扩大 f 的值域而得到的函数 $h:X\to Z$ 连续;

(4) (局部性质) 如果 $X=\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha$ 满足: 对每个 $\alpha\in J$, U_α 是 X 的开集, 且 $f|_{U_\alpha}:U_\alpha\to Y$ 连续, 则 f 连续;

(5) (粘接引理) 如果 $X=F\cup G$ 满足: F, G 都是 X 的闭集, 且 $f|_F$, $f|_G$ 都是连续的, 则 f 连续.

证明　(1) 设 U 是 Y 的开集, 则 $(f|_Z)^{-1}(U)=Z\cap f^{-1}(U)$. 因为 f 连续, $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集, 所以 $Z\cap f^{-1}(U)$ 是 Z 中的开集, 从而 $f|_Z$ 连续.

(2) 对 Z 的开集 B, 由于 Z 是 Y 的子空间, 存在 Y 的开集 U 使得 $B = Z \cap U$. 因为 $f(X) \subset Z$, 有 $f^{-1}(U) = f^{-1}(Z \cap U) = g^{-1}(B)$. 由于 f 连续, 所以 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集, 于是 $g^{-1}(B)$ 是 X 中的开集, 因此 g 连续.

(3) 对 Z 中的开集 U, 由于 Y 是 Z 的子空间, $U \cap Y$ 是 Y 中的开集. 因为 $f : X \to Y$ 连续, $f^{-1}(U \cap Y) = h^{-1}(U)$ 是 X 中的开集, 所以 $h : X \to Z$ 连续.

(4) 设 V 是 Y 中的任意开集, 则对每个 $\alpha \in J$, $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_\alpha$. 因为 U_α 是 X 中的开集且 $f|_{U_\alpha}$ 连续, 由定理 2.4.3, 所以 $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ 是 X 中的开集, 而

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} (f^{-1}(V) \cap U_\alpha),$$

于是 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 故 f 连续.

(5) 设 C 是 Y 的闭子集. 因为 $f|_F$, $f|_G$ 都是连续的, 所以 $(f|_F)^{-1}(C)$ 与 $(f|_G)^{-1}(C)$ 分别是 F 与 G 的闭子集, 从而也是 X 的闭集. 于是

$$f^{-1}(C) = (F \cap f^{-1}(C)) \cup (G \cap f^{-1}(C)) = (f|_F)^{-1}(C) \cup (f|_G)^{-1}(C)$$

是 X 的闭集. 由定理 2.3.5, f 连续. □

对拓扑空间 X, 因为恒等映射 $i : X \to X$ 总是连续的, 所以对 X 的子空间 Z, 由定理 2.4.4 的 (1), 则内射 $j : Z \to X$ 也总是连续的. 为了记号的简洁, 定理 2.4.4 的 (2) 和 (3) 中涉及限制值域或扩大值域而得到的函数 g 和 h 仍记为函数 f.

例 2.4.3 函数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

因为在闭集 $[0, +\infty)$ 与 $(-\infty, 0]$ 上, h 的限制都连续, 由粘接引理, 所以 h 连续. 而由

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0, \\ x - 1, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

定义了函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 虽然它在两个区间 $(0, +\infty)$ 与 $(-\infty, 0]$ 上的限制都连续, 但 g 不连续. 因为 $\mathbb{R}$ 的开集 $(-2, 0)$ 关于 g 的原像 $(-1, 0]$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的开集.

定义 2.4.2 设 X, Y 都是拓扑空间, 函数 $f : X \to Y$. 如果对 X 的每个开 (闭) 集 A, $f(A)$ 是 Y 的开 (闭) 集, 则称 f 是**开 (闭) 映射**.

在讨论闭映射所保持的拓扑性质时, 常常用到下面的定理.

定理 2.4.5 若 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射, 则 f 是闭映射当且仅当对每一 $y \in Y$ 及 X 中的任意开集 $U \supset f^{-1}(y)$, 存在 Y 中开集 W 使 $y \in W$ 且 $f^{-1}(W) \subset U$.

证明　设 f 是闭映射. 对每一 $y \in Y$ 及 X 中的任意开集 $U \supset f^{-1}(y)$, 置 $W = Y - f(X - U)$, 则 W 是 Y 中的开集, 且由引理 1.1.1, $y \in W$, $f^{-1}(W) \subset U$.

反之, 设 F 是 X 中闭集, 任取 $y \in Y - f(F)$, 由引理 1.1.1, 那么 $f^{-1}(y) \subset X - F$. 由假设条件, 存在 Y 中开集 W 使 $y \in W$ 且 $f^{-1}(W) \subset X - F$, 所以 y 的开邻域 $W \subset Y - f(F)$. 根据定理 2.1.1, $Y - f(F)$ 是 Y 的开集, 从而 $f(F)$ 是 Y 中的闭集. □

例 2.4.4　设 $I = [0,1]$ 是单位闭区间, $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ 是单位圆周, 分别赋予 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ 关于通常拓扑的子空间拓扑. 定义映射 $g : I \to \mathbb{S}^1$ 为

$$g(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), \quad x \in I.$$

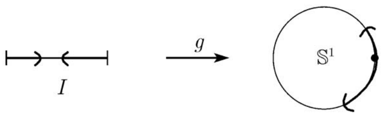


图 2.4.1

由例 2.2.2 和定理 2.4.1, $\mathbb{S}^1$ 中全体开圆弧之集是子空间 $\mathbb{S}^1$ 的基. 根据定理 2.4.5, 易验证 g 是闭映射, 见图 2.4.1.

习　题　2.4

2.4.1　设 X 是拓扑空间. 若 $Z \subset Y \subset X$, 则 Z 作为子空间 Y 的子空间与作为 X 的子空间是相同的.

2.4.2　设 Y 是拓扑空间 X 的子空间, 且 Y 是 X 的开集. 若 $U \subset Y$, 则 U 是 Y 的开集当且仅当 U 是 X 的开集.

2.4.3　设 $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. 由 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上字典序的限制得 $I \times I$ 上的字典序. 问: $I \times I$ 上的序拓扑与它作为序空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的子空间拓扑是否相同?

2.4.4　设 Y 是拓扑空间 X 的子空间, $A \subset Y$. 证明:

(1) $A^\circ = \mathrm{int}_Y(A) \cap Y^\circ$;

(2) $\partial_Y(A) \subset \partial(A)$, 并举例说明等式可以不成立,

其中 $\partial(A)$ 和 $\partial_Y(A)$ 分别表示 A 在拓扑空间 X 和子空间 Y 中的边缘.

2.4.5　证明: 有限补空间的每个子空间仍是有限补空间.

2.4.6　问: 粘接引理中当 X 表示为可数个闭子空间的并时是否成立?

2.4.7　设 X, Y 都是拓扑空间, 函数 $f : X \to Y$. 若 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的拓扑基, 则函数 f 是开的当且仅当对每一 $B \in \mathscr{B}$, $f(B)$ 是空间 Y 中的开集. 上述结论对于子基的情形是否成立?

2.4.8　定义函数 $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ 为 $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. 试问: 函数 $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ 是否开映射? 是否闭映射?

2.4.9　设 $(X, <)$ 是全序集, $Y \subset X$. 如果对任意 $a, b \in Y$ 且 $a < b$, 有

$$(a,b) = \{x \in X : a < x < b\} \subset Y,$$

则称 Y 是 X 中的凸子集.

设 X 是序拓扑空间, $Y \subset X$. 如果 Y 是 X 的凸子集, 则 Y 的序拓扑与它作为 X 的子空间拓扑是相同的.

2.5　有限积空间

设 X 和 Y 都是拓扑空间. 置

$$\mathscr{B} = \{U \times V:\ U,\ V \text{ 分别是 } X,\ Y \text{ 中的开集}\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是笛卡儿积集 $X \times Y$ 上的基.

事实上, 首先, 对任意 $(x, y) \in X \times Y$, 有 $(x, y) \in X \times Y \in \mathscr{B}$. 其次, 如果 $U_1 \times V_1,\ U_2 \times V_2 \in \mathscr{B}$, 则

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathscr{B}.$$

根据定义 2.2.1, $\mathscr{B}$ 是 $X \times Y$ 的某拓扑的基. 由这基生成的 $X \times Y$ 上的拓扑是本节讨论的中心内容.

定义 2.5.1　设 X 和 Y 都是拓扑空间. 集族

$$\mathscr{B} = \{U \times V:\ U,\ V \text{ 分别是 } X,\ Y \text{ 中的开集}\}$$

作为基生成的 $X \times Y$ 上的拓扑称为 $X \times Y$ 上的*积拓扑*, $X \times Y$ 具有积拓扑称为*积空间*.

定理 2.5.1　设 $X,\ Y$ 都是拓扑空间. 若 $\mathscr{B}_1,\ \mathscr{B}_2$ 分别是 $X,\ Y$ 的拓扑基, 则集族

$$\mathscr{B} = \{B_1 \times B_2:\ B_i \in \mathscr{B}_i,\ i = 1, 2\}$$

是 $X \times Y$ 的积拓扑的基.

证明　论证将反复应用定理 2.2.1. 显然, $\mathscr{B}$ 中的每个元素是积空间 $X \times Y$ 中的开集. 对积空间 $X \times Y$ 的任意开集 W 及 $(x, y) \in W$, 存在 X 中的开集 U 与 Y 中的开集 V 使 $(x, y) \in U \times V \subset W$. 因为 $x \in U$ 与 $y \in V$, 分别存在 $B_1 \in \mathscr{B}_1$ 与 $B_2 \in \mathscr{B}_2$ 使 $x \in B_1 \subset U$ 与 $y \in B_2 \subset V$, 于是 $(x, y) \in B_1 \times B_2 \subset U \times V \subset W$. 因而, $\mathscr{B}$ 是 $X \times Y$ 的拓扑基. □

例 2.5.1　设 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 是实空间 $\mathbb{R}$ 的积空间, 通常称为*二维欧几里得空间*, 简称*二维欧氏空间*或*欧氏平面*. 由定理 2.5.1, 全体矩形域 $(a, b) \times (c, d)$ 所组成的集族是 $\mathbb{R}^2$ 的基. 由例 2.2.3, 欧氏平面拓扑就是 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑.

回忆在 1.1 节定义过的从笛卡儿积集到坐标集的投射 $\pi_1 : X \times Y \to X$ 和 $\pi_2 : X \times Y \to Y$. 易知, 对每个集合 $U \subset X$, $V \subset Y$, 有

$$\pi_1^{-1}(U) = U \times Y, \quad \pi_2^{-1}(V) = X \times V, \quad \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = U \times V.$$

定理 2.5.2 若 X 和 Y 都是拓扑空间, 则投射 π_1, π_2 都是连续的开、满映射.

证明 易知, π_1, π_2 都是连续的满映射. 往证 π_1 是开映射, 只要证明 $X \times Y$ 的基元素 $U \times V$ 在 π_1 下的像是 X 中的开集 (见习题 2.4.7). 因为 $\pi_1(U \times V) = U$, 所以 π_1 是开映射. 同理, π_2 是开映射. □

例 2.5.2 投射不一定是闭映射.

设 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 具有积拓扑. $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是到第一个坐标空间的投射. 集合

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 1\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集, 但 $\pi_1(A) = \mathbb{R} - \{0\}$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

为了进一步分析积空间上的映射性质, 需要如下关于积拓扑较简单的子基构造.

定理 2.5.3 若 X 和 Y 都是拓扑空间, 则集族

$$\mathscr{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : \ U \text{ 是 } X \text{ 中的开集}\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : \ V \text{ 是 } Y \text{ 中的开集}\}$$

是 $X \times Y$ 上积拓扑的子基.

证明 设 τ 是 $X \times Y$ 的积拓扑. 因为 $\pi_1^{-1}(X) = X \times Y$, 由定义 2.2.2, $\mathscr{S}$ 是 $X \times Y$ 上某一拓扑 τ' 的子基. 若 U 与 V 分别是 X 与 Y 中的开集, 则 $\pi_1^{-1}(U)$, $\pi_2^{-1}(V) \in \tau$, 所以 $\mathscr{S}$ 的元素的有限交的任意并仍是 τ 的元素, 因此 $\tau' \subset \tau$. 另一方面, 拓扑 τ 的基元素形如 $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) \in \tau'$, 所以 $\tau \subset \tau'$. □

定理 2.5.4 若 X, Y 和 Z 都是拓扑空间, 则函数 $f : Z \to X \times Y$ 连续当且仅当复合函数 $\pi_1 \circ f : Z \to X$ 与 $\pi_2 \circ f : Z \to Y$ 都连续.

证明 如果 f 连续, 根据定理 2.5.2, 那么复合函数 $\pi_1 \circ f$, $\pi_2 \circ f$ 都连续. 反之, 如果两复合函数 $\pi_1 \circ f$ 与 $\pi_2 \circ f$ 都连续, 由定理 2.5.3, 则对 $X \times Y$ 中子基的形如 $\pi_1^{-1}(U)$, $\pi_2^{-1}(V)$ 的元素, 其中 U, V 分别是 X 与 Y 中的开集, 有

$$f^{-1}(\pi_1^{-1}(U)) = (\pi_1 \circ f)^{-1}(U), \quad f^{-1}(\pi_2^{-1}(V)) = (\pi_2 \circ f)^{-1}(V)$$

都是 Z 中的开集. 根据定理 2.2.3, f 连续. □

在上述定理中, f 作为映入积空间的函数, 如果记 $f_1 = \pi_1 \circ f$, $f_2 = \pi_2 \circ f$, 则对每一 $z \in Z$, $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$, 所以 f_1, f_2 分别称为 f 的坐标函数. 于是定理 2.5.4 可简述为: 映入积空间的函数是连续的当且仅当它的每个坐标函数是连续的.

例 2.5.3 设区间 $[0,1)$ 与单位圆周 $\mathbb{S}^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$ 分别是实空间 $\mathbb{R}$ 和欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 的子空间. 定义映射 $f:[0,1)\to\mathbb{S}^1$ 为

$$f(t)=(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t),\quad t\in[0,1).$$

因为 f 的两个坐标函数都是连续的, 根据定理 2.5.4, f 是连续的双射. 但 f 不是开映射.

事实上, 令 $U=[0,1/4)$, 则 U 是 $[0,1)$ 中的开集. 若 f 是开映射, 那么 $f(U)$ 是 $\mathbb{S}^1$ 中的开集. 因为 $f(0)=(1,0)\in f(U)$, 所以 $f(U)$ 包含含有点 $f(0)$ 的一段开圆弧, 矛盾, 见图 2.5.1.

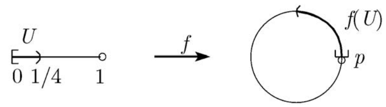


图 2.5.1

以上所讨论的积空间是两个拓扑空间的积空间, 这完全是为了便于理解和书写而安排的. 完全类似地, 可讨论有限个拓扑空间的积空间, 即若 $(X_i,\tau_i)(\ i=1,2,\cdots,n)$ 是有限个拓扑空间, 置

$$\mathscr{B}=\left\{\prod_{i=1}^{n}U_i: U_i\in\tau_i,\ i=1,2,\cdots,n\right\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是笛卡儿积集 $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ 上的拓扑基. 它生成的 $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ 上的拓扑称为 $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ 上的**积拓扑**, $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ 具有积拓扑称为**积空间**, $\mathscr{B}$ 中元称为积空间的**基本开集**或**典范开集**, 每一 X_i 称为积空间的**坐标空间**. 由此, 完全平行地可获得本节的所有结果 (见定理 2.5.1∼ 定理 2.5.4), 不再一一叙述.

习 题 2.5

2.5.1 在定义 2.5.1 中, 集族 $\mathscr{B}$ 是否是积空间 $X\times Y$ 上的拓扑?

2.5.2 若 X, Y 和 Z 都是拓扑空间, 证明:

(1) 积空间 $X\times Y$ 同胚于积空间 $Y\times X$;

(2) 如果 $y\in Y$, 则拓扑空间 X 同胚于积空间 $X\times Y$ 的子空间 $X\times\{y\}$;

(3) 积空间 $X\times Y\times Z$ 同胚于积空间 $(X\times Y)\times Z$.

2.5.3 设 X, Y 都是拓扑空间. 若 $A\subset X$, $B\subset Y$, 则在积空间 $X\times Y$ 中,

(1) $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$;

(2) $(A\times B)^\circ=A^\circ\times B^\circ$.

2.5.4 设 L 为平面上的一条直线, 试描述 L 分别关于积空间 $\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$ 的子空间拓扑.

2.5.5　证明 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的字典序拓扑与 $\mathbb{R}_d\times\mathbb{R}$ 的积拓扑是同一个拓扑, 这里 $\mathbb{R}_d$ 表示实数集 $\mathbb{R}$ 赋予离散拓扑的空间. 试比较上述拓扑与 $\mathbb{R}^2$ 上通常拓扑的粗细.

2.5.6　设 $I=[0,1]$. 试比较 $I\times I$ 的积拓扑, $I\times I$ 的字典序拓扑, $I\times I$ 关于 $\mathbb{R}^2$ 字典序拓扑的子空间拓扑.

2.6　商　空　间

对给定的拓扑空间 X, Y 及函数 $f:X\to Y$, 由定义 2.1.4 可以确定 f 的连续性. 而对给定的拓扑空间 (X,τ) 到集合 Y 的满函数 f, 当 Y 具有平庸拓扑时, f 是连续的, 但 Y 的这种拓扑的意义不大. 在 Y 是否存在使 f 成为连续函数的最细的拓扑? 为使 f 连续的必要条件是当 U 是 Y 中的开集时, 原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集. 置

$$\tau'=\{U\subset Y: f^{-1}(U)\in\tau\},$$

则 τ' 是集合 Y 上的拓扑.

事实上, 条件 (O1) 显然成立.

设 $A,\ B\in\tau'$, 有 $f^{-1}(A),\ f^{-1}(B)\in\tau$. 于是

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\in\tau,$$

所以 $A\cap B\in\tau'$. 因此, (O2) 成立.

设 $\tau_0'\subset\tau'$, 不妨设 $\tau_0'\neq\varnothing$, 对每个 $A\in\tau_0'$, 有 $f^{-1}(A)\in\tau$. 因而

$$f^{-1}\left(\bigcup_{A\in\tau_0'}A\right)=\bigcup_{A\in\tau_0'}f^{-1}(A)\in\tau,$$

所以 $\bigcup\limits_{A\in\tau_0'}A\in\tau'$, 故 (O3) 也成立.

因为 τ' 是 Y 上的拓扑, 引入下述定义.

定义 2.6.1　设 (X,τ) 是拓扑空间, Y 是一个集合, 函数 $f:X\to Y$ 是满的. 集族

$$\tau'=\{U\subset Y: f^{-1}(U)\in\tau\}$$

称为 Y 的 (相对于函数 f 的) **商拓扑**, 拓扑空间 (Y,τ') 称为 (相对于函数 f 的) **商空间**, 映射 $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ 称为**商映射**.

以一个简单的例子说明商拓扑的形成. 设 $\mathbb{R}$ 是实空间, $Y=\{1,2,3\}$, $f:\mathbb{R}\to Y$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ 3, & x<0,\end{cases}$$

则 f 是满射. Y 的相对于 f 的商拓扑 $\tau=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{3\},\ \{1,3\},\ Y\}$.

下述定理表明, 商拓扑是本节开头提出的集合 Y 上合适的拓扑.

定理 2.6.1 设 (X,τ) 是拓扑空间, Y 是一个集合. 若函数 $f:X\to Y$ 是满的, 则 Y 的商拓扑是使 f 连续的最细的拓扑.

证明 让 $\tau'=\{U\subset Y: f^{-1}(U)\in\tau\}$ 是 Y 的商拓扑. 对 $U\in\tau'$, $f^{-1}(U)\in\tau$, 所以 $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ 连续. 若 τ'' 是 Y 上的拓扑使得 $f:(X,\tau)\to(Y,\tau'')$ 是连续的, 则对 $U\in\tau''$, 由 f 的连续性, $f^{-1}(U)\in\tau$, 所以 $U\in\tau'$. 从而 $\tau''\subset\tau'$. 故 τ' 是 Y 上使 f 连续的最细的拓扑. □

商映射是连续的满映射. 若定义 2.6.1 后的空间 Y 赋予平庸拓扑 τ_0, 则 $f:\mathbb{R}\to(Y,\tau_0)$ 是连续的满映射, 但不是商映射. 对拓扑空间 X 和 Y, 当函数 $f:X\to Y$ 是连续的满映射时, 如何确定 f 是商映射? 如何给出能蕴含 f 是商映射的较简单的条件?

定理 2.6.2 设 X 和 Y 都是拓扑空间. 若 $f:X\to Y$ 是连续的满映射, 则

(1) f 是商映射当且仅当对 Y 的子集 F, 若 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集 (开集), 那么 F 是 Y 的闭集 (开集);

(2) 若 f 是闭 (开) 映射, 则 f 是商映射.

证明 (1) 仅证明闭集时的情形. 设 f 是商映射. 如果 $F\subset Y$ 满足 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集, 则 $f^{-1}(Y-F)=X-f^{-1}(F)$ 是 X 的开集. 因为 Y 赋予商拓扑, 所以 $Y-F$ 是 Y 的开集, 从而 F 是 Y 的闭集.

反之, 设 U 是 Y 关于商拓扑的开集, 则 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集, 于是 $X-f^{-1}(U)=f^{-1}(Y-U)$ 是 X 中的闭集. 由假设, $Y-U$ 是 Y 的闭集, 所以 U 是 Y 的开集. 因此, Y 的商拓扑粗于 Y 上的拓扑. 根据定理 2.6.1, Y 上的拓扑就是商拓扑, 即 f 是商映射.

(2) 设 f 是闭 (开) 映射. 若 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集 (开集), 则 $F=f(f^{-1}(F))$ 是 Y 中的闭 (开) 集. 由 (1), f 是商映射. □

利用同胚、开映射、闭映射的定义及定理 2.6.2, 容易证明下面的定理 (见习题 2.6.1).

定理 2.6.3 设 X, Y 都是拓扑空间, 函数 $f:X\to Y$ 是连续的双射. 下述条件等价:

(1) f 是同胚映射;

(2) f 是开映射;

(3) f 是闭映射;

(4) f 是商映射.

商映射具有较好的稳定性. 读者可直接验证下述结果 (见习题 2.6.2).

定理 2.6.4 商映射的复合映射是商映射.

定理 2.6.5 设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间. 如果 $f: X \to Y$ 是商映射, $g: Y \to Z$ 是函数, 则

(1) g 连续当且仅当 $g \circ f: X \to Z$ 连续;

(2) g 是商映射当且仅当 $g \circ f: X \to Z$ 是商映射.

证明 (1) 如果 g 连续, 则因商映射的连续性, $g \circ f$ 连续. 反之, 设复合函数 $g \circ f$ 连续. 对 Z 中的任意开集 W, $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ 是 X 中的开集. 因为 f 是商映射, 所以 $g^{-1}(W)$ 是 Y 中的开集, 从而 g 连续.

(2) 设 g 是商映射, 则由 (1) 及定理 2.6.4, $g \circ f$ 是商映射. 反之, 设 $g \circ f$ 是商映射, 则 g 必是满射且由 (1), g 连续. 设 V 是 Z 的子集, 使 $g^{-1}(V)$ 是 Y 中的开集. 由于 f 连续, 于是 $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$ 是 X 中的开集, 因为 $g \circ f$ 是商映射, V 是 Z 中的开集. 根据定理 2.6.2, g 是商映射. □

商空间之所以引起人们的兴趣主要是因为它是构造许多重要空间的有效途径. 新空间的生成是通过等价关系确定了商集 (见定义 1.2.1), 而后在商集上利用自然投射赋予商拓扑.

定义 2.6.2 设 (X, τ) 是拓扑空间, R 是 X 中的等价关系. 商集 X/R 上 (相对于自然投射 p) 的商拓扑 τ_R 称为 X/R 上 (相对于等价关系 R) 的*商拓扑*. 拓扑空间 $(X/R, \tau_R)$ 称为拓扑空间 (X, τ) (相对于等价关系 R) 的*商空间*.

设 X 是拓扑空间, R 是 X 中的等价关系. 除非特别说明, 总认为商集 X/R 的拓扑是商拓扑, 即把 X/R 作为拓扑空间指的是商空间, 而自然投射 $p: X \to X/R$ 是商映射. 如此确定的商空间似乎是定义 2.6.1 所定义的商空间的特例, 下面说明其实质是一样的. 下述引理是导出商映射的一种经典方法.

引理 2.6.1 设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间, $p: X \to Y$ 是商映射, $g: X \to Z$ 是连续映射. 如果对每个 $y \in Y$, $g(p^{-1}(y))$ 是单点集, 则

(1) g 诱导连续映射 $f: Y \to Z$, 满足条件 $f \circ p = g$;

(2) f 是商映射当且仅当 g 是商映射.

证明 对每个 $y \in Y$, 因为集合 $g(p^{-1}(y))$ 是 Z 中的单点集, 记 $g(p^{-1}(y)) = \{f(y)\}$. 这就定义了映射 $f: Y \to Z$ 且 $f \circ p = g$, 见图 2.6.1. 由定理 2.6.5, (1) 和 (2) 成立. □

对于满函数 $g: X \to Z$, 在 X 中定义关系 R_g 如下: 对 $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 R_g x_2 \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2),$$

则 R_g 是 X 中的等价关系 (见习题 1.2.1). 这时, 对于自然投射 $p: X \to X/R_g$ 及 $x \in X$, $p^{-1}([x]) = g^{-1}(g(x))$, 且 $X/R_g = \{g^{-1}(z) : z \in Z\}$.

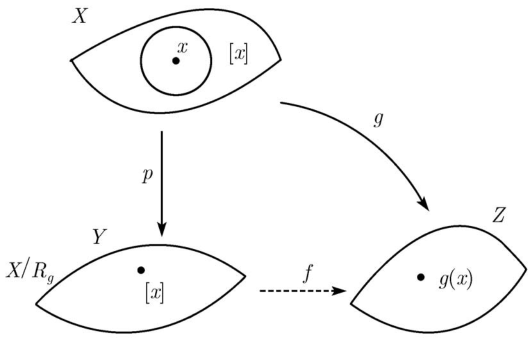


图 2.6.1

定理 2.6.6 设 X 和 Z 都是拓扑空间. 如果 $g: X \to Z$ 是商映射, 则商空间 X/R_g 与 Z 同胚.

证明 对每一 $[x] \in X/R_g$, $g(p^{-1}([x])) = \{g(x)\}$ 是 Z 中的单点集. 由引理 2.6.1, g 诱导商映射 $f: X/R_g \to Z$, 满足 $f \circ p = g$, 见图 2.6.1. 对每个 $x \in X$, 有 $f([x]) = g(x)$, 所以 f 是双射, 从而 f 是同胚 (见定理 2.6.3). □

例 2.6.1 设 $I = [0,1]$ 是单位闭区间. 若 I 中的等价关系 R 定义为

$$\text{对 } x, y \in I,\ xRy \Leftrightarrow x = y \text{ 或 } x, y \in \{0, 1\},$$

则商空间 I/R 同胚于单位圆周 $\mathbb{S}^1$.

定义映射 $g: I \to \mathbb{S}^1$ 为

$$g(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), \quad x \in I.$$

由例 2.4.4 及定理 2.6.2, g 是商映射. 易知, $I/R = \{g^{-1}(p) : p \in \mathbb{S}^1\}$. 由定理 2.6.6, I/R 与 $\mathbb{S}^1$ 同胚.

本节最后介绍几个重要的商空间.

例 2.6.2 记 $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ 为单位正方形.

(1) 定义 I^2 中的等价关系 R 为: 对 $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2) \in I^2$,

$$p_1 R p_2 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2, \\ \text{存在 } t \in I,\ \text{使得 } p_1, p_2 \in \{(0,t), (1,t)\}, \\ \text{存在 } t \in I,\ \text{使得 } p_1, p_2 \in \{(t,0), (t,1)\}. \end{cases}$$

这时, $\{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$ 是一个等价类. 商空间 I^2/R 称为**环面**, 见图 2.6.2.

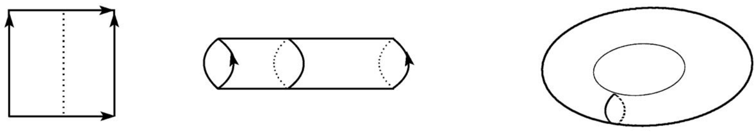


图 2.6.2　环面

(2) 定义 I^2 中的等价关系 R 为: 对 $p_1=(x_1,y_1),\ p_2=(x_2,y_2)\in I^2$,

$$p_1Rp_2 \Leftrightarrow p_1=p_2,\ \text{或存在}\ t\in I,\ \text{使得}\ p_1,p_2\in\{(0,t),(1,1-t)\}.$$

商空间 I^2/R 称为 **Möbius 带**, 见图 2.6.3.

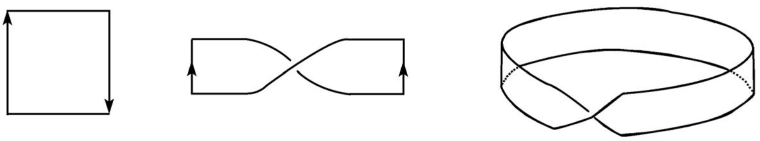


图 2.6.3　Möbius 带

(3) 定义 I^2 中的等价关系 R 为: 对 $p_1=(x_1,y_1),\ p_2=(x_2,y_2)\in I^2$,

$$p_1Rp_2 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1=p_2,\ \text{或} \\ \text{存在}\ t\in I,\ \text{使得}\ p_1,p_2\in\{(0,t),(1,t)\},\ \text{或} \\ \text{存在}\ t\in I,\ \text{使得}\ p_1,p_2\in\{(t,0),(1-t,1)\}. \end{cases}$$

商空间 I^2/R 称为 **Klein 瓶**, 见图 2.6.4.

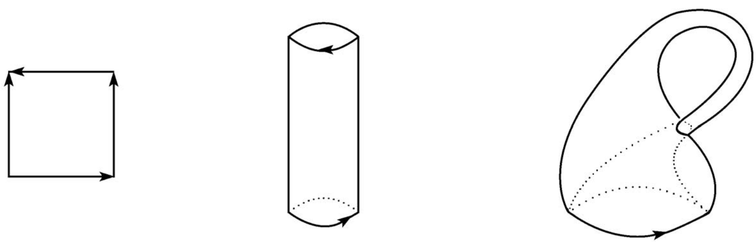


图 2.6.4　Klein 瓶

习　题　2.6

2.6.1　证明定理 2.6.3.

2.6.2 设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间. 如果 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 都是商映射, 则复合函数 $g \circ f: X \to Z$ 是商映射.

2.6.3 定义映射 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 为

$$f(x) = (\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明: f 是开映射.

2.6.4 设 X 是拓扑空间, A 是 X 的非空闭子集. 在 X 上定义等价关系 R: 把 A 中的点算作一类, $X - A$ 中的每一点算作一类. 证明: 自然投射 $p: X \to X/R$ 是闭映射. 上述商空间 X/R 称为把 A 黏合成一点得到的 X 的商空间.

2.6.5 设 $\pi_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是到第一个坐标空间的投射. 令

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2:\ x \geqslant 0 \text{ 或者 } y = 0\},$$

且 A 具有欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑. 证明: 限制映射 $q = \pi_1|_A: A \to \mathbb{R}$ 是非开非闭的商映射.

2.6.6 对拓扑空间 (X, τ), 集合 Y 及函数 $f: X \to Y$, 置

$$\tau' = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \in \tau\}.$$

试分析集族 τ' 的性质.

第 3 章　几类重要的拓扑性质

本章介绍几类以某种自然的方式导入的拓扑性质, 它们都是实直线或其子空间一些性质的抽象形式, 内容涉及可度量性、连通性、分离性、紧性和可数性, 其中最关键的是正规的拓扑空间. 这些性质的研究是点集拓扑学早期发展中最富创造性的工作, 它们不仅仅初步建立了一般拓扑学的发展框架, 而且像 Tietze 扩张定理、Urysohn 度量化定理等, 已成为学科发展的强大动力.

3.1　可 度 量 性

度量空间是一类重要的拓扑空间, 它不但有着广泛的应用, 而且也为许多拓扑概念提供适当的直观描述. 本节由两部分组成, 一是介绍度量、度量拓扑; 二是讨论度量空间上的连续性与收敛性.

定义 3.1.1　设 X 是一个集合. 如果存在函数 $d: X \times X \to \mathbb{R}$, 使得对任意 $x, y, z \in X$ 满足

(M1) 非负性: $d(x,y) \geqslant 0$, 且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(M2) 对称性: $d(x,y)=d(y,x)$;

(M3) 三角不等式: $d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$,

则称 d 是 X 上的*度量*, $d(x,y)$ 称为点 x 与点 y 之间的*距离*. (X,d) 称为*度量空间*, 在不致引起混淆时, 简称为度量空间 X. 条件 (M1) $\sim$ (M3) 称为*度量公理*.

在度量空间 (X,d) 中, 对 $x \in X$, $\varepsilon > 0$, 记

$$B_d(x,\varepsilon)=\{y \in X : d(x,y)<\varepsilon\},$$

称为 (X,d) 中以 x 为中心的 *ε 球形邻域*, 在不致引起混淆时, 简记为 $B(x,\varepsilon)$.

定理 3.1.1　若 (X,d) 是度量空间, 则集族 $\mathscr{B}=\{B(x,\varepsilon): x \in X,\ \varepsilon>0\}$ 是 X 的某个拓扑的基.

证明　(1) 任意的 $x \in X$, $\varepsilon>0$, 有 $x \in B(x,\varepsilon)$.

(2) 任意的 $B_1,\ B_2 \in \mathscr{B}$, 存在 $x_1,\ x_2 \in X$ 及 $\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0$ 使得 $B_1 = B(x_1,\varepsilon_1),\ B_2=B(x_2,\varepsilon_2)$. 如果 $y \in B_1 \cap B_2$, 令

$$\varepsilon=\min\{\varepsilon_1-d(x_1,y),\ \varepsilon_2-d(x_2,y)\}>0,$$

则对任意 $z \in B(y,\varepsilon)$, 有

$$d(x_1,z) \leqslant d(x_1,y)+d(y,z) < d(x_1,y)+\varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

因而 $z \in B(x_1,\varepsilon_1)$, 即 $B(y,\varepsilon) \subset B(x_1,\varepsilon_1)$, 见图 3.1.1. 同理, $B(y,\varepsilon) \subset B(x_2,\varepsilon_2)$. 所以

$$y \in B(y,\varepsilon) \subset B(x_1,\varepsilon_1) \cap B(x_2,\varepsilon_2) = B_1 \cap B_2.$$

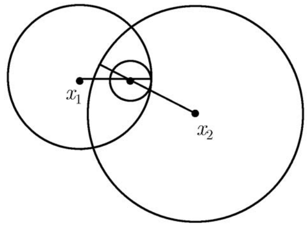


图 3.1.1

根据定义 2.2.1, $\mathscr{B}$ 是 X 的某个拓扑的基. □

定义 3.1.2 设 (X,d) 是度量空间. 由基 $\mathscr{B}=\{B(x,\varepsilon): x\in X,\ \varepsilon>0\}$ 生成的 X 上的拓扑称为由度量 d 诱导的*度量拓扑*, 记为 τ_d.

从而, 度量空间是拓扑空间. 由定理 3.1.1 证明中的 (2), 若 $y \in B(x,\varepsilon)$, 则存在 $\delta>0$ 使得 $B(y,\delta)\subset B(x,\varepsilon)$. 根据定理 2.2.1, 度量空间 (X,d) 的子集 $U\in\tau_d$ 当且仅当对每个 $y\in U$, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(y,\varepsilon)\subset U$.

例 3.1.1 离散度量空间.

设 X 是非空集合. $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 定义为

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

d 是 X 上的度量. 由它诱导的 X 上的拓扑是离散拓扑.

对任意 $x\in X$, 任意 $\varepsilon>0$, 如果 $\varepsilon>1$, 则 $B(x,\varepsilon)=X$; 如果 $\varepsilon\leqslant 1$, 则 $B(x,\varepsilon)=\{x\}$. 因此, 由 $\mathscr{B}=\{B(x,\varepsilon): x\in X,\ \varepsilon>0\}$ 生成的 X 上的拓扑是离散拓扑. 故 (X,d) 也称为*离散度量空间*.

例 3.1.2 $\mathbb{R}$ 的通常度量.

实数集 $\mathbb{R}$ 上的*通常度量* $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$d(x,y)=|x-y|,\quad x,\ y\in\mathbb{R}.$$

d 是 $\mathbb{R}$ 上的度量. 由它诱导的 $\mathbb{R}$ 上的拓扑是通常拓扑 (见例 2.2.4 (1)).

事实上, $\mathbb{R}$ 中以点 x 为中心的 ε 球形邻域 $B(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ 与通常拓扑的基元 (a,b) 是一致的.

定理 3.1.2 设 X 是一个集合. 如果 $d,\ d'$ 是 X 上的两个度量, 则诱导拓扑 $\tau_{d'}$ 细于 τ_d 当且仅当对每个 $x\in X$ 及每个 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $B_{d'}(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon)$.

证明 必要性. 设 $\tau_{d'}$ 细于 τ_d. 对 τ_d 的任意一个基元 $B_d(x,\varepsilon)$ $(x\in X,\ \varepsilon>0)$, 由于 $x\in B_d(x,\varepsilon)\in\tau_{d'}$, 于是存在 $\delta>0$, 使得 $B_{d'}(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon)$.

充分性. 设 B 是 τ_d 的任意一个基元且 $x \in B$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $x \in B_d(x, \varepsilon) \subset B$. 由题设条件, 则存在 $\delta > 0$ 使 $x \in B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon) \subset B$. 根据定理 2.2.2, $\tau_{d'}$ 细于 τ_d. □

定义 3.1.3　对于 $n \in \mathbb{Z}_+$, 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 非负数

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

称为 x 的模. 对于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 令

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

则 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的度量 (见习题 3.1.1), d 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得度量, 简称欧氏度量或通常度量, $(\mathbb{R}^n, d)$ 称为 n 维欧氏空间, d 诱导的 $\mathbb{R}^n$ 上的度量拓扑称为欧氏拓扑或通常拓扑.

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}, \quad \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$$

分别称为 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面和闭的单位球体.

令

$$\rho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|, \cdots, |x_n - y_n|\},$$

则 $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 上的度量 (见习题 3.1.1), ρ 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的平方度量.

在实数集 $\mathbb{R}$ 上, 两个度量 d, ρ 是一致的. 对于平面 $\mathbb{R}^2$, 关于度量 d 的基元是圆形域, 关于度量 ρ 的基元是方形域. 由例 2.5.1, 它们诱导出 $\mathbb{R}^2$ 上相同的拓扑. 更一般地, 下面的定理表明度量 d 与 ρ 诱导出 $\mathbb{R}^n$ 上相同的拓扑.

定理 3.1.3　由欧氏度量 d 与平方度量 ρ 所诱导的 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑都是 $\mathbb{R}^n$ 上的积拓扑.

证明　若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant \sqrt{n}\rho(x, y).$$

于是, 对 $\varepsilon > 0$, 有

$$B_\rho(x, \varepsilon/\sqrt{n}) \subset B_d(x, \varepsilon) \subset B_\rho(x, \varepsilon).$$

根据定理 3.1.2, 有 $\tau_\rho \subset \tau_d \subset \tau_\rho$, 所以 $\tau_\rho = \tau_d$.

设 τ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的积拓扑, 往证 $\tau_\rho = \tau$. 对每个 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 及 $\varepsilon > 0$, $B_\rho(x, \varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon,\ x_i + \varepsilon) \in \tau$. 因此, $\tau_\rho \subset \tau$.

另一方面, 设 B 是 τ 的任意一个基本开集且 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B$. 记

$B=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$, 则对 $1\leqslant i\leqslant n$, 有 $x_i\in(a_i,b_i)$, 从而存在 $\varepsilon_i>0$ 使 $(x_i-\varepsilon_i,\ x_i+\varepsilon_i)\subset(a_i,b_i)$. 取 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_i:1\leqslant i\leqslant n\}$, 于是

$$x\in B_\rho(x,\varepsilon)\subset\prod_{i=1}^{n}(x_i-\varepsilon_i,\ x_i+\varepsilon_i)\subset B.$$

由定理 2.2.2, $\tau\subset\tau_\rho$. 这表明 $\tau_\rho=\tau$. □

定理 3.1.3 表明, 一个集合上的不同的度量可以诱导出相同的拓扑.

定理 3.1.4 设 (X,d) 是度量空间. 若 $A\subset X$, 则 $d|_{A\times A}$ 是 A 上的度量且 A 上由 $d|_{A\times A}$ 诱导的度量拓扑与它作为 X 上由 d 诱导的度量拓扑的子空间拓扑是相同的.

证明 记 $d'=d|_{A\times A}$. 由于任意的 $x,y\in A$, 有 $d'(x,y)=d(x,y)$, 因而 d' 满足定义 3.1.1 的 (M1) $\sim$ (M3), 所以 d' 是 A 上的度量.

对每个 $x\in A$ 及任意的 $\varepsilon>0$, 由 d' 诱导的 A 上的度量拓扑的基元素形如 $B_{d'}(x,\varepsilon)$; A 作为 X 上由 d 诱导的度量拓扑的子空间拓扑的基元素形如 $B_d(x,\varepsilon)\cap A$. 易知, $B_{d'}(x,\varepsilon)=B_d(x,\varepsilon)\cap A$, 所以两拓扑是相同的. □

定理 3.1.4 中的 $(A,\ d|_{A\times A})$ 称为度量空间 (X,d) 的*度量子空间*.

以下讨论度量空间上的连续函数与收敛性.

定理 3.1.5 设 (X,d_X), (Y,d_Y) 都是度量空间. 若函数 $f:X\to Y$, 则 f 连续当且仅当对任意的 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $f(B_{d_X}(x,\delta))\subset B_{d_Y}(f(x),\varepsilon)$.

证明 必要性. 设 f 连续. 对任意的 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$, 集合 $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x),\varepsilon))$ 是 X 中包含 x 的开集, 存在 $\delta>0$, 使 $B_{d_X}(x,\delta)\subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x),\varepsilon))$. 于是 $f(B_{d_X}(x,\delta))\subset B_{d_Y}(f(x),\varepsilon)$.

充分性. 对任意的 $x\in X$, $\{B_{d_Y}(f(x),\varepsilon):\varepsilon>0\}$ 是点 $f(x)$ 在 Y 的邻域基. 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $f(B_{d_X}(x,\delta))\subset B_{d_Y}(f(x),\varepsilon)$, 即 $B_{d_X}(x,\delta)\subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x),\varepsilon))$, 所以 $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x),\varepsilon))$ 是 x 的邻域. 由定理 2.2.4, f 在 x 连续. 再由定理 2.1.6, f 连续. □

由于定理 3.1.5 中的 $f(B_{d_X}(x,\delta))\subset B_{d_Y}(f(x),\varepsilon)$ 等价于 "当 $d_X(x,y)<\delta$ 时, 有 $d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$", 所以上述定理就是数学分析中函数连续性的 ε-δ 语言叙述方式.

对度量空间 (X,d) 及 $x\in X$, X 的非空子集 A, 数

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a):a\in A\}$$

称为点 x 到集合 A 的*距离*.

定理 3.1.6 设 (X,d) 是度量空间. 若 A 是 X 的非空子集, 则函数 $d(x,A)$ 在 X 上连续.

证明　对任意的 $x,y\in X$ 及每个 $a\in A$, 有

$$d(x,A)\leqslant d(x,a)\leqslant d(x,y)+d(y,a),$$

从而

$$d(x,A)-d(x,y)\leqslant d(y,A)=\inf\{d(y,a):a\in A\},$$

即 $d(x,A)-d(y,A)\leqslant d(x,y)$. 同理, $d(y,A)-d(x,A)\leqslant d(x,y)$. 因此

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y).$$

由定理 3.1.5, $d(x,A)$ 在 X 上连续. □

定义 3.1.4　设 X 是拓扑空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列且 $x\in X$. 如果对 x 的任意邻域 U, 存在 $m\in\mathbb{Z}_+$, 满足对任意 $n>m$, 有 $x_n\in U$, 则称序列 $\{x_n\}$ *收敛于* x, 称 x 为序列 $\{x_n\}$ 的*极限*或*收敛点*. 当 x 是序列 $\{x_n\}$ 的唯一极限时, 记 $x_n\to x$, 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

一般情况下, 拓扑空间中收敛序列的收敛点不一定是唯一的. 例如, 让 X 是平庸空间, 则 X 中的任意序列都收敛且收敛于 X 中的每一点.

对度量空间 (X,d) 及 $x\in X$, $\{B(x,1/n):n\in\mathbb{Z}_+\}$ 是点 x 在 X 中的可数的邻域基 (即由可数个元组成的一个邻域基), 即度量空间的每一点具有可数的邻域基. 这一性质有助于简化拓扑空间中的收敛性质.

定义 3.1.5　设 X 是拓扑空间. 如果 X 的拓扑是由它上的某个度量 d 诱导的, 则称 X 是*可度量化空间*.

引理 3.1.1 (*序列引理*)　设 X 是拓扑空间, $A\subset X$ 且 $x\in X$.

(1) 如果 A 中有一收敛于 x 的序列, 则 $x\in\overline{A}$;

(2) 如果 x 在 X 中具有可数的邻域基且 $x\in\overline{A}$, 则 A 中有收敛于 x 的序列;

(3) 如果 $x\in\overline{A}$ 且 A 中不存在序列收敛于 x, 则 X 不是可度量化空间.

证明　(1) 设 $\{x_n\}$ 是 A 中收敛于 x 的序列, 则对 x 的任意邻域 U, 有 $U\cap A\neq\varnothing$. 根据定理 2.3.3, $x\in\overline{A}$.

(2) 设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 x 在 X 中一个可数的邻域基. 对每一 $n\in\mathbb{Z}_+$, 让 $V_n=\bigcap\limits_{i\leqslant n}U_i$, 则 V_n 是 x 的邻域. 因为 $x\in\overline{A}$, 由定理 2.3.3, $V_n\cap A\neq\varnothing$. 取定 $x_n\in V_n\cap A$, 则 A 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

事实上, 对 x 的任意邻域 U, 存在 $m\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $U_m\subset U$. 当 $n>m$ 时, $x_n\in V_n\subset V_m\subset U_m\subset U$, 所以序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

(3) 由于度量空间的每一点具有可数的邻域基, 由 (2), 满足 (3) 的条件的空间必定不是可度量化空间. □

例 3.1.3 良序空间 $[0,\omega_1]$ 不是可度量化的.

由例 2.3.1, $\omega_1 \in \overline{[0,\omega_1)}$. 如果 $[0,\omega_1]$ 是可度量化空间, 由引理 3.1.1 的 (2), 则 $[0,\omega_1)$ 中存在序列 $\{x_n\}$ 收敛于 ω_1. 因为集合 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 $[0,\omega_1)$ 的可数子集, 根据推论 1.2.1, 它在 $[0,\omega_1)$ 中有上界, 所以存在 $b \in [0,\omega_1)$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{Z}_+$, 有 $x_n \leqslant b$, 即 $x_n \notin (b,\omega_1]$. 因此, 序列 $\{x_n\}$ 不收敛于 ω_1, 矛盾.

在度量空间中, 可用较简单的序列收敛性来刻画函数的连续性.

定理 3.1.7 设拓扑空间 X 的每一点具有可数的邻域基, Y 是拓扑空间. 若函数 $f : X \to Y$, 则 f 连续当且仅当对 X 中的每一收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 在 Y 中收敛于 $f(x)$.

证明 必要性. 设 f 连续, $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x 的序列. 令 V 是 $f(x)$ 在 Y 中的邻域, 则 $f^{-1}(V)$ 是 x 在 X 中的邻域. 于是存在 $m \in \mathbb{Z}_+$, 使得当 $n > m$ 时, 有 $x_n \in f^{-1}(V)$, 即当 $n > m$ 时, 有 $f(x_n) \in V$. 所以 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x)$.

充分性. 假设条件成立. 根据定理 2.3.5, 只需证明对每个 $A \subset X$, 有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

设 $x \in \overline{A}$, 根据引理 3.1.1 的 (2), 存在 A 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$. 由假设, Y 中的序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x)$. 因为 $f(x_n) \in f(A)$, 再根据引理 3.1.1 的 (1), 有 $f(x) \in \overline{f(A)}$. 因此, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. □

定义 3.1.6 设 X 是拓扑空间, Y 是可度量化空间, 并且对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 函数 $f_n : X \to Y$ 及 $f : X \to Y$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $m \in \mathbb{Z}_+$, 满足对任意 $n > m$ 及任意 $x \in X$, 有 $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 X 上**一致收敛**于 f, 简称 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

定理 3.1.8 (一致收敛定理) 设 $\{f_n\}$ 是拓扑空间 X 到可度量化空间 Y 的连续函数列及函数 $f : X \to Y$. 如果 $\{f_n\}$ 在 X 上一致收敛于 f, 则 f 连续.

证明 设 d 是诱导出 Y 的拓扑的度量. 让 V 是 Y 中的任意开集, 往证 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 设 $x_0 \in f^{-1}(V)$, 则 $f(x_0) \in V$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_d(f(x_0),\varepsilon) \subset V$. 由于 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $m \in \mathbb{Z}_+$, 满足对任意 $n \geqslant m$ 及任意的 $x \in X$, 有 $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$.

因为 f_m 在点 x_0 连续, 存在 x_0 在 X 中的邻域 U, 使得 $f_m(U) \subset B_d(f_m(x_0),\varepsilon/3)$. 下证 $f(U) \subset B_d(f(x_0),\varepsilon)$. 对任意的 $x \in U$, 有

$$d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad d(f_m(x_0), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{及 } d(f_m(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因而

$$d(f(x_0), f(x)) \leqslant d(f(x_0), f_m(x_0)) + d(f_m(x_0), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) < \varepsilon,$$

所以 $f(x) \in B_d(f(x_0), \varepsilon)$. 因此 $f(U) \subset B_d(f(x_0), \varepsilon) \subset V$, 即 $U \subset f^{-1}(V)$. 由定理 2.1.1, $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 这就证明了 f 的连续性. □

与数学分析类似, 我们可讨论拓扑空间到度量空间的函数项级数的一致收敛性, 利用函数列与函数项级数的相互转换关系, 可得到函数项级数的一致收敛定理. 这一结论的叙述及证明留作练习 (见习题 3.1.7).

习 题 3.1

3.1.1 验证: 定义 3.1.3 中的 d, ρ 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的度量.

3.1.2 对 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

证明: d' 是诱导出 $\mathbb{R}^n$ 上通常拓扑的度量. 当 $n = 2$ 时, 画出 d' 下的球形邻域.

3.1.3 若 (X, d) 是度量空间, 证明:

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

是 X 上的度量, 且 d' 和 d 诱导出 X 上相同的拓扑.

3.1.4 设 A 是度量空间 (X, d) 的非空子集. 证明: $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

3.1.5 在 $\mathbb{R}$ 是有限补空间时, 求序列 $\{1/n\}$ 的收敛点.

3.1.6 证明: 可度量性是拓扑性质.

3.1.7 叙述并证明拓扑空间到度量空间的函数项级数的一致收敛定理.

3.2 连 通 性

微积分学中的介值定理是一个重要的定理, 它依赖于本节要介绍的区间 $[a, b]$ 的连通性. 讨论拓扑空间具有的这种性质及其在拓扑学、分析学、几何学等相关学科中的应用是十分有益的. 本节介绍连通性的刻画、子空间性质、映射性质、有限积空间性质及一些简单应用.

定义 3.2.1 设 X 是拓扑空间. A, $B \subset X$. 如果 $A \cap \overline{B} = \varnothing$ 且 $\overline{A} \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B 是一对隔离集.

在上述定义中, A 与 B 是不相交的, 且其中的任何一个集不包含另一个集的任何聚点. 因此, 两个不相交的开 (或闭) 集是一对隔离集 (见推论 2.3.1). 在实空间 $\mathbb{R}$ 中, 区间 $(0, 1)$ 与 $(-1, 0)$ 是一对隔离集, 而 $[0, 1)$ 与 $(-1, 0)$ 不是一对隔离集. 在离散空间中, 任何两个不相交集都是一对隔离集. 而在平庸空间中, 任何两个非空子集都不是一对隔离集.

定义 3.2.2 设 X 是拓扑空间. 如果 X 中有一对非空隔离集 A 与 B 使得 $X = A \cup B$, 则称 A 与 B 是 X 的一个分割. 此时, 称 X 是不连通空间. 如果 X 不存在分割, 则称 X 是连通空间.

任何平庸空间是连通空间. 多于一点的离散空间是不连通空间.

定理 3.2.1 设 X 是拓扑空间. 下列条件等价:

(1) X 存在分割;

(2) X 存在不相交的非空闭子集 A 和 B 使得 $A \cup B = X$;

(3) X 存在不相交的非空开子集 A 和 B 使得 $A \cup B = X$;

(4) X 存在既开且闭的非空真子集.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 A 与 B 是 X 的分割. 显然, $A \cap B = \varnothing$ 且

$$\overline{B} = \overline{B} \cap (A \cup B) = (\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B) = B.$$

因此, B 是 X 中的闭集. 同理, A 也是 X 的闭集.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 A 与 B 是 X 的子集, 满足 (2). 令 $A_1 = X - B$, $B_1 = X - A$, 则 A_1 与 B_1 满足条件 (3) 的要求.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 A 与 B 是 X 的子集, 满足 (3), 则 A 和 B 都是 X 中的既开且闭的非空真子集.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 A 是 X 中的子集, 满足 (4). 令 $B = X - A$, 则 A 与 B 都是 X 的非空闭子集, $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = X$. 易见, A 与 B 是 X 的分割. □

按照定义 3.2.2 及定理 3.2.1, 有连通空间的如下刻画.

定理 3.2.2 设 X 是拓扑空间. 下列条件等价:

(1) X 是连通空间;

(2) X 中不存在不相交的非空闭子集 A 和 B 使得 $A \cup B = X$;

(3) X 中不存在不相交的非空开子集 A 和 B 使得 $A \cup B = X$;

(4) X 中既开且闭的子集只有 $\varnothing$ 与 X.

例 3.2.1 $\mathbb{R}$ 的任意区间作为实空间的子空间是连通的.

设 X 是 $\mathbb{R}$ 的任意区间 (包括无限区间). 若 X 作为实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间是不连通的, 则存在 X 的不相交的非空闭子集 A 与 B, 使得 $A \cup B = X$. 选取 $a \in A$, $b \in B$, 则 $a \neq b$. 不妨设 $a < b$, 因为 X 是区间, 所以 $[a, b] \subset X$. 令 $A_1 = A \cap [a, b]$, $B_1 = B \cap [a, b]$, 则 A_1, B_1 都是子空间 $[a, b]$ 的闭子集. 由于 A_1 有上界 b, 于是 A_1 有上确界, 记为 c. 又由于 A_1 是闭集, 所以 $c \in A_1 \subset A$. 因为 $b \in B$, 于是 $c < b$ 且 $(c, b] \subset B_1$. 由于 B_1 是闭集, 所以 $c \in \overline{(c, b]} \subset B_1 \subset B$, 从而 $c \in A \cap B$. 这与 $A \cap B = \varnothing$ 矛盾. 因此, X 是连通的.

特别地, 实空间 $\mathbb{R}$ 是连通的.

设 Y 是拓扑空间 X 的子空间. 若 Y 作为 X 的子空间是连通的, 则 Y 称为 X 的**连通子集**. 所以 $[a,b]$ 是实空间的连通子集, 但是有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是实空间的连通子集. 事实上, $\mathbb{Q}$ 的非空连通子空间只是单点集.

设 Y 是 $\mathbb{Q}$ 的至少含有两点的子空间, 取定两点 $p,\ q\in Y$ 及无理数 a, 使 a 介于 p 与 q 之间. 因而

$$Y=(Y\cap(-\infty,a))\cup(Y\cap(a,+\infty)),$$

且 $Y\cap(-\infty,a)$ 与 $Y\cap(a,+\infty)$ 是 Y 的两个不相交非空开集, 所以 Y 是不连通的. 这表明 $\mathbb{Q}$ 的非空连通子空间只能是单点集.

以下引理表明, 子空间的隔离性相对于空间而言是稳定的. 这对判别子空间的连通性是很有用的.

引理 3.2.1　设 Y 是拓扑空间 X 的子空间. 若 $A,\ B\subset Y$, 则 $A,\ B$ 是 Y 的一对隔离集当且仅当 $A,\ B$ 是 X 的一对隔离集.

证明　由定理 2.4.2,

$$\mathrm{cl}_Y(A)\cap B=(\overline{A}\cap Y)\cap B=\overline{A}\cap B,\quad \mathrm{cl}_Y(B)\cap A=\overline{B}\cap A,$$

所以 $A,\ B$ 是 Y 的一对隔离集当且仅当 $A,\ B$ 是 X 的一对隔离集. □

设 $Y=[-1,0)\cup(0,1]$ 是实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间. 由于在 $\mathbb{R}$ 中 $[-1,0)$ 与 $(0,1]$ 是隔离的, 所以在 Y 中 $[-1,0)$ 与 $(0,1]$ 也是隔离的, 从而 Y 不是连通子集.

引理 3.2.2　设 Y 是拓扑空间 X 的连通子空间, $A,\ B$ 是 X 的一对隔离集. 若 $Y\subset A\cup B$, 则 $Y\subset A$ 或 $Y\subset B$.

证明　因为 $Y\subset A\cup B$, 所以 $Y=(Y\cap A)\cup(Y\cap B)$. 根据引理 3.2.1, $Y\cap A$ 与 $Y\cap B$ 是 Y 的一对隔离集. 因为 Y 是连通的, 所以 $Y\cap A=\varnothing$ 或 $Y\cap B=\varnothing$, 于是 $Y\subset B$ 或 $Y\subset A$. □

引理 3.2.3　设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是拓扑空间 X 的连通子空间的族. 如果 $\bigcap\limits_{\alpha\in J}A_\alpha\neq\varnothing$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$ 是 X 的连通子空间.

证明　令 $Y=\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$ 且取定 $p\in\bigcap\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$. 假设 C 与 D 是 Y 的分割, 则 $p\in C$ 或 $p\in D$, 不妨设 $p\in C$. 因为对每个 $\alpha\in J$, A_α 是连通的, 根据引理 3.2.2, $A_\alpha\subset C$ 或 $A_\alpha\subset D$, 于是 $A_\alpha\subset C$. 从而 $Y=\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha\subset C$. 这与 D 是 Y 的非空子集矛盾. 故 $Y=\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$ 是连通的. □

定理 3.2.3　设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是拓扑空间 X 的连通子空间的族. 如果对任意 $\alpha,\beta\in J$, 有 $A_\alpha\cap A_\beta\neq\varnothing$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha$ 是 X 的连通子空间.

证明 取定 $\alpha_0 \in J$, 对任意 $\beta \in J$, 令 $B_\beta = A_{\alpha_0} \cup A_\beta$. 由引理 3.2.3, B_β 是连通的. 从而 $\{B_\beta\}_{\beta\in J}$ 是 X 的连通子空间的族且 $\bigcap\limits_{\beta\in J} B_\beta = A_{\alpha_0} \neq \varnothing$. 根据引理 3.2.3, $\bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in J} B_\beta$ 是连通的. □

定理 3.2.4 设 X 是拓扑空间, A 是 X 的连通子空间. 如果 $A \subset B \subset \overline{A}$, 则 B 也是连通的, 特别地, $\overline{A}$ 是连通的.

证明 如果 C 与 D 是 B 的分割, 根据引理 3.2.2, 则 $A \subset C$ 或 $A \subset D$. 不妨设 $A \subset C$, 那么 $\overline{A} \subset \overline{C}$. 由引理 3.2.1, $\overline{C} \cap D = \varnothing$, 所以 $B \cap D = \varnothing$. 这与 D 是 B 的非空子集矛盾. □

定理 3.2.5 连通空间的连续像是连通的, 即连续映射保持连通性.

证明 设 X 是连通空间且 $f: X \to Y$ 是连续映射. 由定理 2.4.4, 关于限制映射的连续性, 不妨设 $Y = f(X)$. 假设 Y 不连通. 根据定理 3.2.1, Y 存在既开且闭的非空真子集 A. 由于 f 连续, $f^{-1}(A)$ 是 X 的既开且闭的非空真子集, 这与 X 的连通性矛盾. 因此, Y 是连通的. □

定理 3.2.5 说明连通性是一个拓扑性质, 即与连通空间 X 同胚的每个空间是连通的.

定理 3.2.6 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ 都是连通空间, 则积空间 $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ 也是连通空间.

证明 由于积空间 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 同胚于积空间 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ (见习题 2.5.2) 及连通性是拓扑不变性 (见定理 3.2.5), 所以只需证明 $n = 2$ 的情形.

取定 $a = (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$. 因为 X_1 连通且 $X_1 \times \{a_2\}$ 同胚于 X_1 (见习题 2.5.2), 所以 $X_1 \times \{a_2\}$ 是连通的. 同理, 对任意 $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, $\{x_1\} \times X_2$ 也是连通的. 由于 $(X_1 \times \{a_2\}) \cap (\{x_1\} \times X_2) = \{(x_1, a_2)\}$, 根据引理 3.2.3, $T_{x_1} = (X_1 \times \{a_2\}) \cup (\{x_1\} \times X_2)$ 是连通的, 且总有 $a \in T_{x_1}$, 见图 3.2.1. 再根据引理 3.2.3, $\bigcup\limits_{x_1\in X_1} T_{x_1}$ 是连通的. 由于 $\bigcup\limits_{x_1\in X_1} T_{x_1} = X_1 \times X_2$, 所以 $X_1 \times X_2$ 是连通的. □

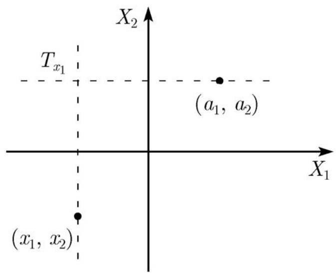


图 3.2.1

利用例 3.2.1 及定理 3.2.6, 积空间 $\mathbb{R}^n$ 是连通的.

作为连通性的应用, 证明微积分学中介值定理的推广形式.

定理 3.2.7 (介值定理) 设 X 和 Y 分别是连通空间和序拓扑空间, 函数 $f: X \to Y$ 是连续的. 如果 $a, b \in X$ 且 r 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间, 则存在 $c \in X$, 使得 $f(c) = r$.

证明 根据定理 3.2.5, $f(X)$ 是连通的. 假设 $r \notin f(X)$. 令

$$A = f(X) \cap (-\infty, r), \quad B = f(X) \cap (r, +\infty),$$

则 A, B 是 $f(X)$ 的不相交的非空开子集, 因此 A 与 B 是 $f(X)$ 的分割, 矛盾. 所以 $r \in f(X)$, 即存在 $c \in X$ 使 $f(c) = r$. □

本节最后给出与连通性相关的几个结果与例子.

对单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 及 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{S}^1$, $-x = (-x_1, -x_2)$ 称为 x 的*对径点*.

定理 3.2.8 (Borsuk-Ulam *定理*) 若函数 $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ 连续, 则存在 $x \in \mathbb{S}^1$ 使得 $f(x) = f(-x)$.

证明 由于 $\mathbb{S}^1$ 是单位闭区间 $[0, 1]$ 的连续像 (见例 2.4.4), 根据例 3.2.1 及定理 3.2.5, $\mathbb{S}^1$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集. 定义函数 $F : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ 为 $F(x) = f(x) - f(-x)$, $x \in \mathbb{S}^1$, 则 F 连续且 $F(-x) = f(-x) - f(x) = -F(x)$. 如果存在 $a \in \mathbb{S}^1$, 使 $F(a) = 0$, 则 $f(a) = f(-a)$, 即 a 为所求. 如果对某个 $a \in \mathbb{S}^1$, $F(a) \neq 0$, 则 $F(a)$ 与 $F(-a)$ 异号. 根据定理 3.2.7, 存在 $x \in \mathbb{S}^1$ 使得 $F(x) = 0$, 即 $f(x) = f(-x)$. □

关于 $\mathbb{S}^2$ 上的 Borsuk-Ulam 定理, 见习题 6.4.3.

定理 3.2.9 对 $n > 1$, $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ 是连通的, 其中 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

证明 仅就 $n = 2$ 的情形给出证明. 令

$$A = (-\infty, 0] \times \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}, \quad B = [0, +\infty) \times \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}.$$

则 $A \cup B = \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$. 根据定理 3.2.6, $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ 是连通的. 因为在 $\mathbb{R}^2$ 中,

$$(-\infty, 0) \times \mathbb{R} \subset A \subset (-\infty, 0] \times \mathbb{R} = \overline{(-\infty, 0) \times \mathbb{R}},$$

由定理 3.2.4, A 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集. 同理, B 也是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集. 由于 $A \cap B \neq \varnothing$, 再根据定理 3.2.3, $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ 是连通的. □

推论 3.2.1 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 与实空间 $\mathbb{R}$ 不同胚.

证明 假设 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚且函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是同胚, 根据定理 2.4.4 的 (1), 限制映射 $f|_{\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}} : \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ 连续. 由定理 3.2.9, $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ 连通, 根据定理 3.2.5, $f|_{\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}}(\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}) = \mathbb{R} - \{f(\mathbf{0})\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的连通子空间, 矛盾. 从而 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}$ 不同胚.

□

习 题 3.2

3.2.1 设 A 与 B 是拓扑空间 X 的隔离子集. 证明: 如果 $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, 则 A_1 与 B_1 也是 X 的隔离子集.

3.2.2 有限补空间和可数补空间 (见习题 2.1.2) 何时是连通的? 何时是不连通的? 给出你的结论和证明.

3.2.3 下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$, Smirnov 删除序列拓扑空间 $\mathbb{R}_K$ 连通吗? 验证你的结论.

3.2.4 设 $Y \subset X$, X 和 Y 都是连通的. 证明: 若 A 与 B 是 $X - Y$ 的分割, 则 $Y \cup A$ 和 $Y \cup B$ 都是连通的.

3.2.5 设 Y 是拓扑空间 X 的子空间. 如果对任意 $x,\ y \in Y$, 存在 X 的连通子集 A_{xy} 使 $x,\ y \in A_{xy} \subset Y$, 则 Y 是连通的.

3.2.6 证明: 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中所有至少有一个坐标为有理数的点构成的集合是连通子集.

3.2.7 设 X 是连通空间, 映射 $f: X \to Y$ 是既开且闭的. 试问: $f(X)$ 是否是拓扑空间 Y 的连通子集?

3.2.8 设 $p: X \to Y$ 是商映射. 证明: 若每个 $p^{-1}(y)(\forall y \in Y)$ 是连通的, 并且 Y 也是连通的, 则 X 是连通的.

3.3 道路连通性

作为连通性的继续, 本节讨论三类相关的连通性: 道路连通性、局部连通性与局部道路连通性. 本节中记 $I = [0,1]$ 为单位闭区间.

定义 3.3.1 设 X 是拓扑空间, $x, y \in X$. 如果存在连续函数 $f: I \to X$, 使得 $f(0) = x$ 且 $f(1) = y$, 则称 f 是 X 中从 x 到 y (或连接 x 与 y) 的一条*道路*. 如果 X 中的任意两点都存在 X 中连接它们的一条道路, 则称 X 是*道路连通空间*.

定理 3.3.1 若 X 是道路连通空间, 则 X 是连通空间.

证明 设 A 与 B 是 X 的分割. 取 $x \in A$, $y \in B$, 由 X 的道路连通性, 存在从 x 到 y 的道路 $f: I \to X$. 由于 I 是连通的且 f 连续, 所以 $f(I)$ 是 X 的连通子集. 根据引理 3.2.2, $f(I) \subset A$ 或 $f(I) \subset B$. 这与 $f(0) = x \in A$, $f(1) = y \in B$ 矛盾. 因此, X 是连通空间. □

连通空间不一定是道路连通的.

例 3.3.1 拓扑学家的正弦曲线.

设

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leqslant 1\}$$

具有 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑. $\mathbb{R}^2$ 的子空间 $\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ 称为*拓扑学家的正弦曲线*.

易验证, S 是道路连通空间. 由定理 3.3.1, S 是连通的. 再由定理 3.2.4, $\overline{S}$ 也是连通的. 往证 $\overline{S}$ 不是道路连通的.

假设 $f: I \to \overline{S}$ 是一条连接原点 $\mathbf{0} = (0,\ 0)$ 与 S 中的某一点的道路, 使 $f(0) = \mathbf{0}$, $f(1) \in S$, 则集合 $A = \{t \in I : f(t) \in \{0\} \times [-1, 1]\}$ 是 I 的闭子集. 令

$c = \sup A$, 则 $c \in A$ 且 $c < 1$, 那么 $g = f|_{[c,1]} : [c,1] \to \overline{S}$ 连续, $g(c) \in \{0\} \times [-1,1]$, 且当 $t \in (c,1]$ 时, $g(t) \in S$, 见图 3.3.1.

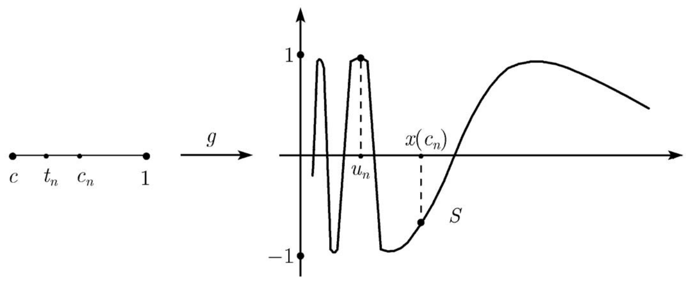


图 3.3.1

记 $g(t) = (x(t),\ y(t))$, $t \in [c,1]$. 根据定理 2.5.4, 函数 x, y 在 $[c,1]$ 上连续, $x(c) = 0$ 且当 $t \in (c,1]$ 时, $x(t) > 0$, $y(t) = \sin(1/x(t))$. 取定区间 $(c,1)$ 中收敛于 c 的递减序列 $\{c_n\}$. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 选取 u_n 满足: $x(c) = 0 < u_n < x(c_n)$ 且 $\sin(1/u_n) = (-1)^n$. 因为 $x(t)$ 在 $[c, c_n]$ 上连续, 根据定理 3.2.7 (介值定理), 存在 t_n 满足: $c < t_n < c_n$, $x(t_n) = u_n$. 于是, 序列 $\{t_n\}$ 收敛于 c, 而以 $y(t_n) = \sin(1/x(t_n)) = (-1)^n$ 作为通项的序列不收敛. 这与 $y(t)$ 的连续性矛盾.

对于不连通或不道路连通的空间, 我们可讨论它的具有特定性质的连通或道路连通的子空间.

定义 3.3.2　设 X 是拓扑空间, $x \in X$. 如果对 x 的每个邻域 U, 存在 x 的连通 (道路连通) 的邻域 V 使得 $V \subset U$, 则称 X 在点 x 是*局部连通* (*局部道路连通*) 的. 如果 X 在它的每一点是局部连通 (局部道路连通) 的, 则称 X 是*局部连通* (*局部道路连通*) *空间*.

易证, 对 $x \in X$, 拓扑空间 X 在 x 局部连通 (局部道路连通) 当且仅当 x 的所有连通 (道路连通) 的邻域组成 x 在 X 中的邻域基. 显然, 局部道路连通空间是局部连通空间.

例 3.3.2　连通 (道路连通) 性和局部连通 (局部道路连通) 性是互不蕴含的.

(1) 局部道路连通而非连通的空间.

$X = [-1,0) \cup (0,1]$ 作为实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间是局部道路连通的, 但不连通.

(2) 道路连通而非局部连通的空间.

梳空间 是集

$$C = (I \times \{0\}) \cup ((\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}) \times I)$$

赋予 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑.

易知, C 是道路连通的. 往证 C 不是局部连通的.

取 $p=(0,1)\in C$, 在 $\mathbb{R}^2$ 中取 p 的邻域 $O=B(p,1/4)$. 令 $U=O\cap C$, 则 U 是 C 中包含 p 的开集, 见图 3.3.2. 设 $V\subset U$ 是 p 的任意一个邻域. 选取 $n\in\mathbb{Z}_+$ 满足 $(1/(n+1),1)$, $(1/n,1)\in V$, 再取实数 r 满足 $1/(n+1)<r<1/n$. 令

$$A=[(-\infty,r)\times\mathbb{R}]\cap V,\quad B=[(r,+\infty)\times\mathbb{R}]\cap V,$$

那么 A 与 B 是 V 的分割, 因此 V 不连通. 因而, C 不是局部连通的.

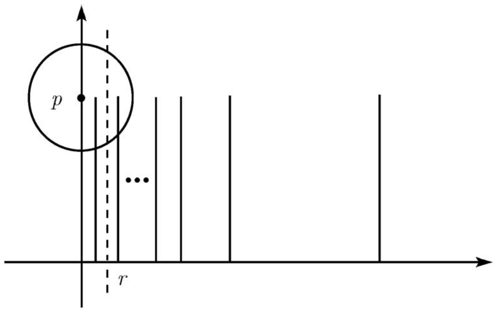


图 3.3.2

引理 3.3.1 设 X 是拓扑空间, $x\in X$. 若 P 是 X 的包含点 x 的所有连通子集 (道路连通子集) 的并, 则 P 是 X 的极大连通 (极大道路连通) 的子集.

证明 对于连通性的情形, 由引理 3.2.3, P 是 X 的连通子集. 对于道路连通性的情形, 设 $y,z\in P$, 则存在 X 的道路连通子集 P_y, P_z 满足 $\{x,y\}\subset P_y$, $\{x,z\}\subset P_z$. 于是分别存在 P 中从 x 到 y, 从 x 到 z 的道路 f 和 g. 定义函数 $h:I\to X$ 为

$$h(t)=\begin{cases} f(1-2t), & 0\leqslant t<1/2,\\ g(2t-1), & 1/2\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $h(0)=y$, $h(1)=z$. 因为 $h(1/2)=f(0)=g(0)$, 由定理 2.4.4 的 (5) (粘接引理), h 是连续的, 所以 h 是 X 中从 y 到 z 的一条道路. 从而, P 是 X 的道路连通子集.

另一方面, 设 Q 是 X 的连通 (道路连通) 子集且 $P\subset Q$. 由 $x\in P$ 知 $x\in Q$. 由 P 的定义, $Q\subset P$, 从而 $P=Q$, 即 P 是极大的. □

上述 P 称为 X 的*连通分支* (*道路连通分支*). 有理数空间 $\mathbb{Q}$ 的每个连通分支是单点集. 易验证, 对 $x\in X$, X 中含有点 x 的道路连通分支含于 X 中含有点 x 的连通分支. 拓扑空间都是它的两两互不相交的连通分支 (道路连通分支) 的并 (见习题 3.3.2).

定理 3.3.2 拓扑空间 X 是局部连通 (局部道路连通) 空间当且仅当 X 的任何一个开集 U 的每个连通分支 (道路连通分支) 在 X 中是开的.

证明 设 X 是局部连通 (局部道路连通) 的空间. 设 U 是 X 的开集, C 是 U 的连通 (道路连通) 分支. 对每个 $x \in C \subset U$, 存在 x 的连通 (道路连通) 的邻域 V_x 使得 $x \in V_x \subset U$. 由于 C 是 U 中的连通 (道路连通) 分支, 于是 $V_x \subset C$. 因此, C 是 X 中的开集.

反之, 设 X 的任何一个开集的每个连通 (道路连通) 分支在 X 中是开的. 对每个 $x \in X$ 及 x 的每个开邻域 U, 令 C 是 U 中包含 x 的连通 (道路连通) 分支, 由假设, C 是 X 中连通 (道路连通) 的开集, 且 $x \in C \subset U$. 因此, X 是局部连通 (局部道路连通) 的. □

定理 3.3.3 局部道路连通的空间中的连通分支与道路连通分支是相同的.

证明 设 X 是局部道路连通空间. 让 P, C 分别是 X 的道路连通分支和连通分支且 $P \cap C \neq \varnothing$. 显然, $P \subset C$. 如果 $P \neq C$, 令

$$Q = \cup\{P' : P' \text{ 是 } X \text{ 中的道路连通分支, } P' \neq P \text{ 且 } P' \cap C \neq \varnothing\},$$

则 $Q \neq \varnothing$ 且 $Q \subset C$. 于是, $C = P \cup Q$. 因为 X 是局部道路连通的, 根据定理 3.3.2, X 的每个道路连通分支是 X 中的开集. 因此, P 与 Q 都是 X 中的开集且它们是 C 的分割. 这与 C 的连通性矛盾, 所以 $P = C$. □

由此, 如果 X 是局部道路连通空间, 则 X 是连通的当且仅当 X 是道路连通的.

例 3.3.3 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是局部道路连通的.

对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 及任意的 $\varepsilon > 0$, x 的球形邻域 $B(x, \varepsilon)$ 是道路连通的. 事实上, 对任意的 $y, z \in B(x, \varepsilon)$, 令 $f(t) = ty + (1-t)z$, $t \in I$, 则函数 $f : I \to B(x, \varepsilon)$ 是连接 z 与 y 的一条道路.

由定理 3.3.3, $\mathbb{R}^n$ 的任何一个开集中的连通分支与道路连通分支相同.

习 题 3.3

3.3.1 证明: 连续映射保持道路连通性.

3.3.2 拓扑空间 X 的所有连通 (道路连通) 分支是互不相交的连通 (道路连通) 子空间, 它们的并等于 X 且 X 中的每个连通 (道路连通) 子空间仅与一个连通 (道路连通) 分支相交.

3.3.3 证明: 有限个局部道路连通空间的积空间仍是局部道路连通空间.

3.3.4 拓扑空间 X 的每个连通 (道路连通) 分支是 X 的开子集吗? 是闭子集吗?

3.3.5 证明: 拓扑学家的正弦曲线 $\overline{S}$ (见例 3.3.1) 不是局部连通的空间.

3.3.6 证明: 若 A 为 $\mathbb{R}^2$ 的可数子集, 那么 $\mathbb{R}^2 - A$ 是道路连通的.

3.3.7 局部连通空间中的连通分支是否与道路连通分支一致? I^2 赋予字典序拓扑称为*有序矩形*, 记为 I_0^2. 试分析 I_0^2 具有的连通性.

3.4 分 离 性

拓扑空间中的分离性反映空间中点与点、点与闭集、闭集与闭集之间借助邻域或开集的不相交性而确定的拓扑性质.

定义 3.4.1 设 X 是拓扑空间. 如果 X 中任意两个不同点的每一点都有一个邻域不包含另外一个点, 则称 X 满足 T_1 **分离公理**或 X 是 T_1 **空间**.

并非任一拓扑空间都是 T_1 空间. 设 $X=\{a,b\}$, 赋予拓扑 $\tau=\{\varnothing,\{a\},X\}$, 则 (X,τ) 不是 T_1 空间.

定理 3.4.1 对拓扑空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是 T_1 空间;

(2) X 中的单点集是闭集;

(3) X 中的有限子集是闭集.

证明 仅证 (1) 与 (2) 的等价性. (1) $\Rightarrow$ (2). 对每个 $x\in X$ 及任意的 $y\in X-\{x\}$, 存在 y 的邻域 U 使得 $x\notin U$, 即 $U\cap\{x\}=\varnothing$. 由定理 2.3.3, $y\notin\overline{\{x\}}$. 从而, $\overline{\{x\}}=\{x\}$, 所以单点集 $\{x\}$ 是闭集.

(2) $\Rightarrow$ (1). 对任意 $x,y\in X$, $x\neq y$, 单点集 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 都是闭集, 所以 x 的邻域 $X-\{y\}$ 不包含 y 且 y 的邻域 $X-\{x\}$ 不包含 x, 所以 (1) 成立. □

定理 3.4.2 设 X 是 T_1 空间. 若 $A\subset X$ 且 $x\in X$, 则 x 是 A 的聚点当且仅当 x 的每个邻域都包含 A 的无限个点.

证明 仅证必要性. 如果存在 x 的一个邻域 U 仅含有 A 的有限个点, 则 $U\cap(A-\{x\})$ 是有限集, 记 $B=U\cap(A-\{x\})$. 根据定理 3.4.1, B 是闭集, 于是 $U\cap(X-B)$ 是点 x 的一个邻域且它与 $A-\{x\}$ 的交为空集. 从而, x 不是 A 的聚点. □

定义 3.4.2 设 X 是拓扑空间. 如果 X 中任意两个不同点有不相交的邻域, 则称 X 满足 T_2 **分离公理**或 X 是 T_2 **空间**. T_2 空间也常称为 Hausdorff **空间**.

易知, Hausdorff 空间是 T_1 空间, 反之未必成立.

例 3.4.1 设 X 是包含无限个元素的有限补空间 (见例 2.1.3). 由于 X 的有限集都是闭集, 所以 X 是 T_1 空间. 而 X 中任意两个非空开集都相交. 事实上, 假设 A, B 是 X 的两个非空开集, 则 $X-A$, $X-B$ 都是有限集, 所以

$$X-(A\cap B)=(X-A)\cup(X-B)$$

是有限集, 从而 A 与 B 相交. 因此, X 不是 Hausdorff 空间.

定理 3.4.3 如果 X 是 Hausdorff 空间, 则 X 中的每个序列至多收敛于一点.

证明 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 对 X 中不同于 x 的点 y, 设 U, V 分别是 x 与 y 的不相交邻域. 存在 $m \in \mathbb{Z}_+$ 满足当 $n > m$ 时, 有 $x_n \in U$, 从而 $x_n \notin V$. 因此, $\{x_n\}$ 不收敛于 y. □

设 (X, d) 是度量空间. 对 X 中不同的两点 x, y, 记 $2\delta = d(x, y) > 0$. 易验证, $B(x, \delta)$, $B(y, \delta)$ 分别是 x, y 的不相交的邻域. 从而, 度量空间是 Hausdorff 空间. 由定理 3.4.3, 度量空间中的收敛序列极限唯一.

T_1, T_2 分离公理也常分别称为 T_1, T_2 **分离性**, 它们都是点与点之间的分离性. 在 T_1 空间中单点集是闭集. 作为更强的分离性, 下面介绍点与闭集、闭集与闭集之间的分离性.

定义 3.4.3 设 X 是 T_1 空间.

(1) 如果对任意的 $x \in X$ 及 X 中不包含 x 的闭集 F, 存在 X 的不相交的开集 U, V 分别含有 x 与 F, 则称 X 满足**正则分离公理**或 X 是**正则空间**.

(2) 如果对 X 中的任意不相交的闭集 A, B, 存在 X 的不相交的开集 U, V 分别含有 A, B, 则称 X 满足**正规分离公理**或 X 是**正规空间**.

正则、正规分离公理也常分别称为**正则、正规分离性**.

易知, 正规空间是正则空间, 正则空间是 Hausdorff 空间. 定义 3.4.3 中的 T_1 空间条件是重要的. 例如, 具有平庸拓扑的两点集空间满足定义中除 T_1 之外的其余条件. 下面的例子说明存在 Hausdorff 的非正则空间, 至于正则而非正规空间的例子见例 3.4.3.

例 3.4.2 Smirnov 删除序列空间 $\mathbb{R}_K$ 是 Hausdorff 空间, 但不是正则空间.

记号同例 2.2.4 的 (3). 因为 $\mathbb{R}$ 上的 K 拓扑细于通常拓扑, 而通常拓扑是 Hausdorff 的, 所以 $\mathbb{R}_K$ 是 Hausdorff 空间. 往证 $\mathbb{R}_K$ 不是正则空间.

显然, $K = \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 $\mathbb{R}_K$ 中的闭集且 $0 \notin K$. 对 $\mathbb{R}_K$ 中分别含有点 0 和闭集 K 的开集 U, V, 取定 $\varepsilon > 0$, 使 $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) - K \subset U$. 再取定 $n \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $1/n < \varepsilon$, 这时 $1/n \in K \subset V$, 所以存在开区间 (c, d) 使得 $1/n \in (c, d) \subset V$, 见图 3.4.1. 取点 $z \in \mathbb{R}_K$ 使得 $\max\{c, 1/(n+1)\} < z < 1/n$, 则 $z \in ((-\varepsilon, \varepsilon) - K) \cap (c, d) \subset U \cap V$. 从而, $U \cap V \neq \varnothing$. 故 $\mathbb{R}_K$ 不是正则空间.

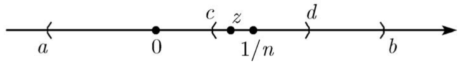


图 3.4.1

定理 3.4.4 若 X 是 T_1 空间, 则 X 是正则的当且仅当对任意 $x \in X$ 及 x 的任意邻域 U, 存在 x 的开邻域 V 使得 $\overline{V} \subset U$.

证明 设 X 是正则空间. 对每个 $x \in X$ 及 x 的任意邻域 U, 则 $x \in U^\circ \subset U$.

令 $F = X - U^\circ$, 则 F 是 X 的闭集且 $x \notin F$. 由 X 的正则性, 存在 X 的不相交开集 V 和 W 分别含有 x 和 F. 于是, $\overline{V} \subset \overline{X - W} = X - W \subset X - F \subset U$.

反之, 设 $x \in X$, F 是 X 中不包含 x 的闭集. 令 $U = X - F$, 则 U 是 x 的开邻域. 根据定理的假设, 存在 x 的开邻域 U_1 使 $U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U$. 令 $V = X - \overline{U}_1$, 则 V 是 X 中的开集且 $F = X - U \subset X - \overline{U}_1 = V$. 易知, $V \cap U_1 = \varnothing$. 由于 X 是 T_1 空间, 所以 X 是正则的. □

与定理 3.4.4 类似, 正规性有下列刻画 (见习题 3.4.5).

定理 3.4.5 若 X 是 T_1 空间, 则 X 是正规的当且仅当对 X 中的每个闭集 F 及包含 F 的任意一个开集 U, 存在包含 F 的开集 V 使得 $\overline{V} \subset U$.

在我们所接触的拓扑空间中哪些是正规空间? 下面将说明度量空间和良序空间都是正规空间.

定理 3.4.6 度量空间是正规的.

证明 设 (X, d) 是度量空间. 显然, X 是 T_1 空间. 设 A 和 B 是 X 中不相交的闭集. 对每个 $a \in A \subset X - B$, 由于 $X - B$ 是开集, 存在 $\varepsilon_a > 0$, 使得 $B(a, 2\varepsilon_a) \subset X - B$, 因而 $B(a, 2\varepsilon_a) \cap B = \varnothing$. 同理, 对每个 $b \in B$, 存在 $\varepsilon_b > 0$, 使得 $B(b, 2\varepsilon_b) \cap A = \varnothing$.

令

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon_a), \quad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon_b),$$

则 U 和 V 是分别包含 A 和 B 的开集. 往证 $U \cap V = \varnothing$. 如果存在 $z \in U \cap V$, 则存在 $a \in A$ 和 $b \in B$, 使得 $z \in B(a, \varepsilon_a) \cap B(b, \varepsilon_b)$, 所以

$$d(a, b) \leqslant d(a, z) + d(z, b) < \varepsilon_a + \varepsilon_b.$$

不妨设 $\varepsilon_a \leqslant \varepsilon_b$, 则 $d(a, b) < 2\varepsilon_b$, 从而 $a \in B(b, 2\varepsilon_b)$, 这与 $B(b, 2\varepsilon_b) \cap A = \varnothing$ 矛盾. 因此, $U \cap V = \varnothing$. 这就证明了 X 是正规空间. □

定理 3.4.7 良序空间是正规的.

证明 设 $(X, <)$ 是具有序拓扑的良序集.

首先, 证明对任意的 $x, y \in X$ 且 $x < y$, 形如 $(x, y]$ 的区间是 X 的开集. 事实上, 如果 y 是 X 的最大元, 则 $(x, y]$ 是 X 的基元素; 如果 y 不是 X 的最大元, 则 $(x, y] = (x, y')$ 是 X 的开集, 其中 y' 是 y 的紧接后元.

其次, 证明 X 的正规性. 易知, X 是 T_1 空间. 设 A, B 是 X 中不相交的非空闭集. 记 a_0 是 X 的最小元.

(1) 设 $a_0 \notin A \cup B$.

对任意的 $a \in A \subset X - B$, 因为 $X - B$ 是开集, 存在 $x_a < a$ 使得 $(x_a, a] \subset X - B$,

即 $(x_a, a] \cap B = \varnothing$. 同理, 对任意的 $b \in B$, 存在 $y_b < b$ 使得 $(y_b, b] \cap A = \varnothing$. 令

$$U = \bigcup_{a \in A} (x_a, a], \quad V = \bigcup_{b \in B} (y_b, b],$$

则 U 和 V 是 X 中分别包含 A, B 的开集. 往证 $U \cap V = \varnothing$.

如果存在 $z \in U \cap V$, 则存在 $a \in A$, $b \in B$ 使得 $z \in (x_a, a] \cap (y_b, b]$. 不妨设 $a < b$, 则 $y_b < z \leqslant a < b$, 这与 $(y_b, b] \cap A = \varnothing$ 矛盾.

(2) 设 $a_0 \in A \cup B$.

不妨设 $a_0 \in A$, $\{a_0\}$ 是 X 中既开且闭的集合, 则 $A - \{a_0\}$ 与 B 是 X 中不相交的闭集. 由 (1), 存在 X 中不相交的开集 U' 和 V' 分别包含 $A - \{a_0\}$ 和 B. 令

$$U = U' \cup \{a_0\}, \quad V = V' - \{a_0\},$$

则 U 和 V 是 X 中分别包含 A, B 的不相交的开集.

综上所述, X 是正规空间. □

一般地, 序拓扑空间是正规的, 证明见文献 [4] 的例 39.

本节最后讨论分离公理的两种运算性质: 遗传性、有限可积性. 设 $\mathscr{P}$ 表示拓扑空间的某种性质. 如果具有性质 $\mathscr{P}$ 的拓扑空间的每个子空间也具有性质 $\mathscr{P}$, 则称 $\mathscr{P}$ 是*遗传性*或具有遗传性. 如果具有性质 $\mathscr{P}$ 的任意有限个拓扑空间的积空间也具有性质 $\mathscr{P}$, 则称 $\mathscr{P}$ 是*有限可积性*.

定理 3.1.4 表明可度量性是遗传性, 定理 3.2.6 表明连通性是有限可积性, 习题 3.3.3 表明局部道路连通性是有限可积性.

定理 3.4.8 T_1、T_2 和正则分离公理都具有遗传性.

证明 仅证正则分离公理具有遗传性. 设 X 是正则空间, Y 是 X 的子空间. 首先, 如果 $x \in Y$, 由定理 3.4.1, 则 $\{x\}$ 是 X 的闭集, 从而 $\{x\}$ 是 Y 的闭集, 所以 Y 是 T_1 空间.

其次, 设 $y \in Y$ 及 A 是 Y 中不包含 y 的闭集. 由于 $A = \mathrm{cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$, 所以 $y \notin \overline{A}$. 根据 X 的正则性, 存在 X 中不相交的开集 U, V 分别含有 y 和 $\overline{A}$, 那么 $U \cap Y$ 和 $V \cap Y$ 是 Y 中分别包含 y 和 A 的不相交开集. 从而 Y 是正则空间. □

定理 3.4.9 T_1、T_2 和正则分离公理都是有限可积性.

证明 仅证正则分离公理是有限可积性. 设拓扑空间 X_i $(\forall\, i \leqslant n)$ 都是正则空间. 记 $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

首先, 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$. 因为 X_i 是 T_1 空间, 由定理 3.4.1, 单点集 $\{x_i\}$ 是 X_i 的闭集, 于是单点集 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ 是 X 的闭集 (见习题 2.5.3 (1)). 因而, X 是 T_1 空间.

其次, 对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$ 及 x 在 X 中的任意邻域 U, 取 X 中的基本开集 $\prod\limits_{i=1}^{n}U_i$, 使得 $x\in\prod\limits_{i=1}^{n}U_i\subset U$, 其中每个 U_i 是 X_i 的开集, $i\leqslant n$. 这时 $x_i\in U_i$, 由于 X_i 是正则空间, 根据定理 3.4.4, 存在 X_i 的开集 V_i, 使得 $x_i\in V_i\subset\overline{V}_i\subset U_i$. 令 $V=\prod\limits_{i=1}^{n}V_i$, 则 V 是 X 中的开集且 $\overline{V}=\prod\limits_{i=1}^{n}\overline{V}_i$ (见习题 2.5.3 (1)), 所以 $x\in V\subset\overline{V}\subset U$. 再根据定理 3.4.4, X 是正则空间. □

对于正规空间, 定理 3.4.8、定理 3.4.9 均不成立.

例 3.4.3 下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$ 是正规的, 但它的积空间 $\mathbb{R}_l^2$ 不是正规的.

先证, $\mathbb{R}_l$ 是正规空间. 对每个 $a\in\mathbb{R}_l$, a 的一个邻域基元形如 $[a,b)$, 其中 $a<b$. 利用定理 3.4.7 的 (1) 中类似的证明, $\mathbb{R}_l$ 是正规空间. 于是, $\mathbb{R}_l$ 是正则的. 根据定理 3.4.9, $\mathbb{R}_l^2$ 是正则的.

再证, $\mathbb{R}_l^2$ 不是正规空间. 为了方便起见, 对 $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, 记

$$S(x,1/n)=[x,\ x+1/n)\times[-x,\ -x+1/n)\subset\mathbb{R}^2.$$

设 $L=\{(x,-x):x\in\mathbb{R}_l\}$. L 是 $\mathbb{R}_l^2$ 的闭子集且 L 作为 $\mathbb{R}_l^2$ 的子空间具有离散拓扑. 对每个 $A\subset L$, A 是 L 的闭子集, 也是 $\mathbb{R}_l^2$ 的闭子集. 令

$$A=\{(x,-x)\in L:x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\},\quad B=L-A,$$

则 A, B 是 $\mathbb{R}_l^2$ 中不相交的闭子集.

设 U, V 是 $\mathbb{R}_l^2$ 中分别包含 A, B 的开集, 往证 $U\cap V\neq\varnothing$. 从而, $\mathbb{R}_l^2$ 不是正规的.

对任意的 $(x,-x)\in A$, 存在 $n_x\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $(x,-x)$ 的邻域基元 $S(x,1/n_x)\subset U$. 令

$$F_n=\{x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}:n_x=n\},\quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

则 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}F_n=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. 记 $\mathrm{cl}(F_n)$ 为 F_n 在实空间 $\mathbb{R}$ 中的闭包. 由例 2.3.2, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}\neq\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathrm{cl}(F_n)$, 于是存在 $n\in\mathbb{Z}_+$ 和 $q\in\mathbb{Q}\cap\mathrm{cl}(F_n)$. 往证 $(q,-q)\in\overline{U}$. 事实上, 对 $(q,-q)$ 在 $\mathbb{R}_l^2$ 中的邻域基元 $S(q,1/k)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, 存在 $p\in F_n$ 使得 $|p-q|<1/\max\{n,k\}$, 那么 $S(q,1/k)\cap S(p,1/n)\neq\varnothing$ (图 3.4.2), 于是 $S(q,1/k)\cap U\neq\varnothing$, 所以 $(q,-q)\in\overline{U}$. 由于 $(q,-q)\in B\subset V$, 于是 $U\cap V\neq\varnothing$.

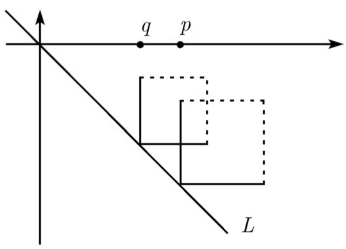


图 3.4.2

本例可以达到两个目的: (1) 正则空间未必是正规的; (2) 两正规空间的积空间未必是正规的. $\mathbb{R}_l^2$ 称为 Sorgenfrey 平面. 作为一般拓扑学的一个著名例子, 它是 1947 年由 R. H. Sorgenfrey (美, 1915～1996) 引入的.

关于正规空间的子空间未必是正规空间的例子见例 3.6.2.

习　题　3.4

3.4.1　设 X 是 T_1 空间. 证明: 如果 X 有基只有有限个元素, 则 X 是仅含有有限个点的离散空间.

3.4.2　试问: 若拓扑空间 X 中的每个收敛序列有唯一的极限, 那么 X 是否是 T_2 空间?

3.4.3　证明: X 是 Hausdorff 空间当且仅当对角线 $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ 是 $X \times X$ 中的闭集. 对任一拓扑空间 X, 如何用分离性刻画 $X \times X - \overline{\Delta}$ 中的点?

3.4.4　证明: T_2 分离公理具有遗传性和有限可积性.

3.4.5　证明定理 3.4.5.

3.4.6　证明: 正规空间的每个闭子空间是正规的.

3.4.7　设 $p : X \to Y$ 是满的连续闭映射. 证明: 若 X 是正规的, 则 Y 也是正规的.

3.4.8　拓扑空间 X 称为完全正规的, 如果 X 是 T_1 空间且 X 的每个子空间是正规的, 即 X 是遗传的正规空间. 证明: T_1 空间 X 是完全正规的当且仅当 X 中的每一对隔离集 A, B 存在不相交的开集分别包含着它们.

3.5　Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理

Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理描述正规性的函数刻画, 它们是拓扑学中最重要的经典结果之一, 奠定了一般拓扑学早期发展中最重要的基础. 本节介绍这两个定理的证明, 并引出完全正则空间.

定理 3.5.1 (Urysohn 引理, 1925)　设 X 是正规空间. 若 A, B 是 X 中不相交的闭集, 则存在连续函数 $f : X \to [0,1]$, 使得当 $x \in A$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \in B$ 时, $f(x) = 1$.

证明　令 $P = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, 则 P 是可数集. 记 $P = \{p_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, $P_n = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, 其中 $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

(1) 对任意的 $q \in \mathbb{Q}$, 存在 X 中的开集 U_q 满足:

$$\text{当 } p,\ q \in \mathbb{Q} \text{ 且 } p < q \text{ 时, 有 } \overline{U}_p \subset U_q. \tag{3.5.1}$$

首先, 通过对 $n \in \mathbb{Z}_+$ 在 P_n 上归纳构造满足条件的开集族. 令 $U_1 = X - B$, 则 U_1 是 X 的开集且 $A \subset U_1$. 根据定理 3.4.5, 存在 X 的开集 U_0, 使得 $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_1$.

假设对 P_n ($n \geqslant 2$) 中的每一点 p, 已定义了开集 U_p 满足 (3.5.1). 现在, 集合 $P_{n+1} = P_n \cup \{p_{n+1}\}$ 是区间 $[0,1]$ 的有限子集且有由实数集上通常的序关系 $<$ 给出的全序. 因为 p_{n+1} 既不是 0 也不是 1, 所以 p_{n+1} 在 P_{n+1} 中有紧接前元 p 和紧接后元 q, 且已定义了开集 U_p 和 U_q 满足 $\overline{U}_p \subset U_q$. 由定理 3.4.5, 存在 X 中的开集 $U_{p_{n+1}}$, 使得

$$\overline{U}_p \subset U_{p_{n+1}} \subset \overline{U}_{p_{n+1}} \subset U_q.$$

从而, 对 P_{n+1} 中的每个元素 p 都定义了 U_p 且 (3.5.1) 成立, 见图 3.5.1. 由此, 完成了归纳证明.

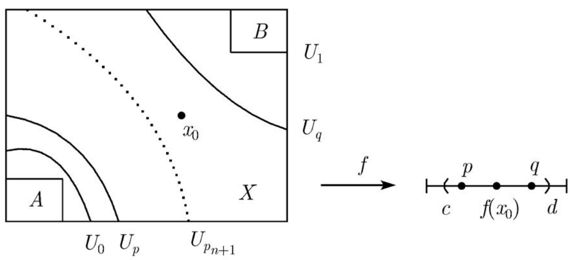


图 3.5.1

其次, 对任意的 $q \in \mathbb{Q} - [0,1]$, 当 $q < 0$ 时, 令 $U_q = \varnothing$; 当 $q > 1$ 时, 令 $U_q = X$. 于是, 对所有的 $q \in \mathbb{Q}$, U_q 已经定义且 (3.5.1) 成立.

(2) 定义函数 $f : X \to [0,1]$ 满足:

$$\text{当 } x \in \overline{U}_r \text{ 时, } f(x) \leqslant r; \qquad \text{当 } x \notin U_r \text{ 时, } f(x) \geqslant r. \tag{3.5.2}$$

对每个 $x \in X$, 令 $Q(x) = \{q \in \mathbb{Q} : x \in U_q\}$. 当 $q \in \mathbb{Q}$ 时, 如果 $q < 0$, 则 $q \notin Q(x)$; 如果 $q > 1$, 则 $q \in Q(x)$. 因此, $Q(x)$ 是有下界的非空集合. 定义函数 $f : X \to [0,1]$ 为 $f(x) = \inf Q(x)$, $x \in X$.

下面验证 (3.5.2) 成立. 设 $x \in \overline{U}_r$. 对任意的有理数 $s > r$, 有 $x \in \overline{U}_r \subset U_s$, 因而 $s \in Q(x)$, 即 $Q(x)$ 包含所有大于 r 的有理数. 于是, $f(x) = \inf Q(x) \leqslant r$. 另一方面, 设 $x \notin U_r$. 对任意的有理数 $s < r$, 有 $\overline{U}_s \subset U_r$, 因而 $x \notin U_s$, 所以 $s \notin Q(x)$, 即 $Q(x)$ 不包含所有小于 r 的有理数. 于是, $f(x) = \inf Q(x) \geqslant r$.

(3) 函数 f 满足定理的要求.

如果 $x \in A$, 则 $x \in \overline{U}_0$, 由 (3.5.2), $f(x) \leqslant 0$, 因此 $f(x) = 0$. 如果 $x \in B$, 则 $x \notin U_1$, 由 (3.5.2), $f(x) \geqslant 1$, 因此 $f(x) = 1$. 往证 f 连续. 由定理 2.4.4 的 (2) 和定理 2.1.6, 只需证明: 若 $x_0 \in X$, 则 $f : X \to \mathbb{R}$ 在点 x_0 连续.

设 $f(x_0) \in (c,\ d)$, 存在 $p,\ q \in \mathbb{Q}$, 使得 $c < p < f(x_0) < q < d$. 令 $U = U_q - \overline{U}_p$, 则 U 是 X 中的开集. 因为 $f(x_0) < q$, 由 (3.5.2), $x_0 \in U_q$; 又因为 $f(x_0) > p$, 由

(3.5.2), $x_0 \notin \overline{U}_p$. 因此, $x_0 \in U_q - \overline{U}_p$, 即 U 是 x_0 的开邻域.

设 $x \in U$. 因为 $x \in U_q \subset \overline{U}_q$, 由 (3.5.2), $f(x) \leqslant q$; 又因为 $x \notin \overline{U}_p$, 由 (3.5.2), $f(x) \geqslant p$. 因而, $f(x) \in [p,\ q] \subset (c,\ d)$. 于是, $f(U) \subset (c,\ d)$, 故 f 在 x_0 连续. □

显然, 把 Urysohn 引理中的区间 $[0,1]$ 换成任意的闭区间 $[a,b]$, 相应的结果一样成立.

定义 3.5.1 设 X 是拓扑空间, $A, B \subset X$. 如果存在连续函数 $f: X \to [0,1]$, 使得当 $x \in A$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \in B$ 时, $f(x) = 1$, 则称 A 与 B 能用**连续函数分离**.

当连续函数 $f: X \to [0,1]$ 分离拓扑空间 X 中的子集 A 与 B 时, 集合 $f^{-1}([0,1/2))$, $f^{-1}((1/2,1])$ 是 X 中分别包含 A 与 B 且不相交的开集. 由 Urysohn 引理, "拓扑空间 X 中任意两不相交的闭集能用不相交的开集分离" (即, 能用不相交的开集分别包含着它们) 等价于 "X 中任意两不相交的闭集能用连续函数分离".

定义 3.5.2 设 X 是 T_1 空间. 如果对任意 $x \in X$ 及 X 中任意不包含 x 的闭集 A, $\{x\}$ 与 A 能用连续函数分离, 则称 X 满足**完全正则分离公理**, 也称 X 是**完全正则空间**或 **Tychonoff 空间**.

显然, 由 Urysohn 引理, 正规空间是完全正则空间; 完全正则空间是正则空间. 于是, 完全正则性是介于正则性与正规性之间的一种分离性质.

定理 3.5.2 完全正则性是遗传性和有限可积性.

证明 仅证有限可积性, 遗传性留作练习 (见习题 3.5.4).

设 $\{X_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是完全正则空间的有限族. 记积空间 $X = \prod\limits_{i \leqslant n} X_i$. 易知, X 是 T_1 空间.

设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in X$ 及 X 中任意一个不包含 a 的闭集 A. 因为 $a \in X - A$, 存在积空间 X 中的基本开集 $U = \prod\limits_{i \leqslant n} U_i$ 使得 $a \in U \subset X - A$, 其中每个 U_i 是 X_i 的开集. 对每个 $i \leqslant n$, 由 $a_i \in U_i$ 及 X_i 的完全正则性, 存在连续函数 $f_i: X_i \to [0,1]$ 使得 $f_i(a_i) = 1$ 且 $f_i(X_i - U_i) \subset \{0\}$. 令 $\pi_i: X \to X_i$ 是投射, 并令 $\varphi_i = f_i \circ \pi_i: X \to [0,1]$, 则 φ_i 连续且 $\varphi_i(a) = 1$.

定义函数 $f: X \to [0,1]$ 为 $f(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_n(x)$, $x \in X$, 则 f 连续且 $f(a) = 1$. 当 $x \in A$ 时, 由于 $x \notin U$, 存在 $j \leqslant n$ 使得 $x_j \notin U_j$, 从而 $\varphi_j(x) = f_j(x_j) = 0$, 于是 $f(x) = 0$. 这就证明了 X 是完全正则空间. □

例 3.5.1 下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$ 的积空间 $\mathbb{R}_l^2$ 是非正规的完全正则空间.

由例 3.4.3, $\mathbb{R}_l$ 是正规空间, 但是 $\mathbb{R}_l^2$ 不是正规空间. 由于 $\mathbb{R}_l$ 是完全正则空间, 根据定理 3.5.2, $\mathbb{R}_l^2$ 是完全正则空间.

正则而非完全正则空间的例子, 读者可见文献 [2] 的例 1.5.9 或 [5] 的例 2.4.1.

作为 Uryhohn 引理的应用, 下面证明著名的扩张定理.

定理 3.5.3 (Tietze 扩张定理, 1925) 设 X 是正规空间. 若 A 是 X 的闭子集, 则任何连续函数 $f: A \to [a,b]$ 都存在连续扩张 $g: X \to [a,b]$.

证明 (1) 对实数 $r > 0$, 若函数 $f: A \to [-r,r]$ 连续, 则存在连续函数 $g: X \to [-r/3, r/3]$, 使得当 $x \in A$ 时, $|f(x) - g(x)| \leqslant 2r/3$.

将区间 $[-r,r]$ 三等分. 令

$$I_1 = [-r, -r/3], \quad I_2 = [-r/3, r/3], \quad I_3 = [r/3, r],$$

及 $B = f^{-1}(I_1)$, $C = f^{-1}(I_3)$. 因为 f 连续, 所以 B 与 C 是 A 中不相交的闭集, 从而它们也是 X 中不相交的闭集, 见图 3.5.2. 根据 Urysohn 引理, 存在连续函数 $g: X \to [-r/3, r/3]$, 使得当 $x \in B$ 时, $g(x) = -r/3$; 当 $x \in C$ 时, $g(x) = r/3$. 于是, 对任意的 $x \in X$, 有 $|g(x)| \leqslant r/3$ 且对任意的 $x \in A$, 有 $|f(x) - g(x)| \leqslant 2r/3$.

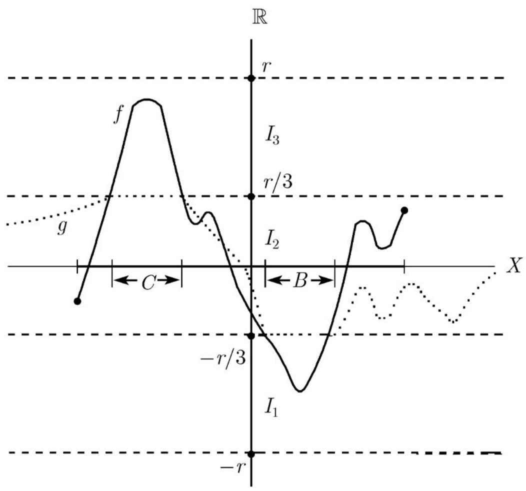


图 3.5.2

由于线性变换 $t = [2s - (a+b)]/(b-a)$ 可以变换 $[a,b]$ 为 $[-1,1]$, 因此不妨设 $[a,b] = [-1,1]$.

(2) 构造连续函数 $g: X \to [-1,1]$ 使得 $g|_A = f$.

由于函数 $f: A \to [-1,1]$ 连续, 由 (1), 存在连续函数 $g_1: X \to [-1/3, 1/3]$, 使得

$$|f(x) - g_1(x)| \leqslant \frac{2}{3}, \quad x \in A.$$

函数 $f - g_1: A \to [-2/3, 2/3]$ 连续, 由 (1), 存在连续函数 $g_2: X \to [-2/3^2, 2/3^2]$, 使得

$$|f(x) - g_1(x) - g_2(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2, \quad x \in A.$$

用同样的方法, 对 $r=(2/3)^{n-1}$ 及连续函数 $f-(g_1+g_2+\cdots+g_{n-1})$, 应用 (1), 可定义连续函数 $g_n:X\to[-2^{n-1}/3^n,2^{n-1}/3^n]$, 使得

$$|f(x)-g_1(x)-g_2(x)-\cdots-g_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n,\quad x\in A.$$

归纳地, 对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$, 函数 g_n 有定义. 对上述得到的连续函数列 $\{g_n\}$ 及 $n\in\mathbb{Z}_+$, 定义函数 $S_n:X\to\mathbb{R}$ 为

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}g_k(x),\quad x\in X,$$

则 $S_n(x)$ 在 X 上连续. 由于每个 $|g_n(x)|\leqslant 2^{n-1}/3^n$, 且数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}/3^n$ 收敛, 所以函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 在 X 上一致收敛, 即函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛, 记 $g(x)$ 为其极限函数, 即

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x),\quad x\in X.$$

由定理 3.1.8, 函数 $g:X\to[-1,1]$ 连续.

对每个 $x\in A$, 有

$$|f(x)-S_n(x)|=|f(x)-g_1(x)-g_2(x)-\cdots-g_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

所以 $S_n(x)$ 收敛于 $f(x)$. 因此, 对 $x\in A$, 有 $f(x)=g(x)$, 即 g 是 f 的连续扩张. □

由 Tietze 扩张定理, 可立刻导出 Urysohn 引理.

推论 3.5.1 设 X 是正规空间. 若 A 是 X 的闭子集, 则任何连续函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 都存在连续扩张 $g:X\to\mathbb{R}$.

证明 因为 $\arctan f$ 是 A 上的有界连续函数, 满足 $|\arctan f|<\pi/2$. 由定理 3.5.3, 存在 $\arctan f$ 在 X 上的连续扩张 $\varPhi$, 使 $|\varPhi|\leqslant\pi/2$. 置 $G=\{x:|\varPhi(x)|=\pi/2\}$, 则 G 是 X 的闭集且与 A 不相交. 由 Urysohn 引理, 存在 X 到 $[0,1]$ 的连续函数 φ, 使 $\varphi(A)\subset\{1\}$, $\varphi(G)\subset\{0\}$. 置 $\varPhi'=\varphi\cdot\varPhi$, 则 $\varPhi'$ 是 X 上的连续函数, 使 $|\varPhi'|<\pi/2$ 且 $\varPhi'(x)=\arctan f(x)$, $x\in A$. 所以 $g=\tan\varPhi'$ 是 f 在 X 上的连续扩张. □

习 题 3.5

3.5.1 在度量空间 (X,d) 上, 对 X 中不相交的闭集 A 与 B, 令

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},\ x\in X.$$

由此, 在度量空间条件下给出 Urysohn 引理的一个直接证明.

3.5.2 分析定理 3.5.1 的证明, 试证: 对任意的实数 r 和有理数 p, q, 有

$$f^{-1}(r) = \bigcap_{q>r} U_q - \bigcap_{p<r} U_p.$$

3.5.3 证明: 多于一点的连通的正规空间是不可数的.

3.5.4 证明: 完全正则性是遗传性.

3.5.5 设 f 是正规空间 X 的闭子集 F 到 I^n ($I=[0,1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$) 内的连续映射. 证明: f 可以连续地扩张到 X 上.

3.5.6 证明: Niemytzki 半平面 (见例 2.2.7) 是完全正则空间, 但不是正规空间.

3.6 紧　性

实数连续性定理中的 Borel 有限覆盖定理所揭示的闭区间的性质, 在一般拓扑学中称为紧性. 紧性在拓扑学的研究中占据核心的地位, 其思想与方法是一般拓扑学发展的重要源泉.

定义 3.6.1 设 X 是拓扑空间, $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族. 如果 $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = X$, 则称 $\mathscr{A}$ 覆盖 X, 或称 $\mathscr{A}$ 是 X 的*覆盖*. 如果 $\mathscr{A}$ 的每个元素是 X 的开子集, 则称 $\mathscr{A}$ 是 X 的*开覆盖*.

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的覆盖. 如果 $\mathscr{A}$ 的子族 $\mathscr{A}_0$ 也是 X 的覆盖, 则称 $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{A}$ 的*子覆盖*. 如果 $\mathscr{A}_0$ 的元素还是有限 (或可数) 的, 则称 $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{A}$ 的*有限 (或可数) 子覆盖*.

定义 3.6.2 设 X 是拓扑空间. 如果 X 的每个开覆盖都有有限子覆盖, 则称 X 是*紧空间*.

先看几个简单的例子.

例 3.6.1 (1) 平庸空间是紧空间.

(2) 离散空间是紧空间当且仅当它是有限的空间.

(3) 实空间 $\mathbb{R}$ 不是紧空间. 因为 $\mathscr{A} = \{(-n,n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的开覆盖, 但 $\mathscr{A}$ 的任意有限子族 $\mathscr{A}_0 = \{(-n_i,n_i) : 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 都不能覆盖 $\mathbb{R}$. 因此, $\mathscr{A}$ 没有有限子覆盖.

(4) $X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子空间是紧的. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的任意开覆盖, 存在 $U_0 \in \mathscr{A}$ 使得 $0 \in U_0$. 存在 $m \in \mathbb{Z}_+$, 使得当 $n > m$ 时有 $1/n \in U_0$. 对 $1 \leqslant i \leqslant m$, 存在 $U_i \in \mathscr{A}$ 使得 $1/i \in U_i$. 令 $\mathscr{A}_0 = \{U_0, U_1, \cdots, U_m\}$, 则 $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖.

设 Y 是拓扑空间 X 的子空间. 如果 Y 作为拓扑空间是紧空间, 则称 Y 是 X 的*紧子集*. 由例 3.6.1 的 (4), $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的紧子集.

定理 3.6.1　若 $(X, <)$ 是具有上确界性质的全序集, 则序拓扑空间 X 的每个闭区间是紧的.

证明　设 $[a,b]$ 是 X 的闭区间. 设 $\mathscr{A}$ 是子空间 $[a,b]$ 的任意一个开覆盖.

(1) 如果 $x \in [a,b)$, 则存在 $y \in (x,b]$ 使得 $[x,y]$ 可由 $\mathscr{A}$ 的至多两个元素覆盖.

因为 $\mathscr{A}$ 是 $[a,b]$ 的开覆盖, 存在 $A \in \mathscr{A}$ 使得 $x \in A$. 由于 $x \neq b$ 且 A 是开的, 存在 $c \in [a,b]$, 使得 $[x,c) \subset A$. 如果 $(x,c) = \varnothing$, 取 $y = c$, 则 $[x,y]$ 仅有两点, 它可用 $\mathscr{A}$ 的至多两个元覆盖. 如果 $(x,c) \neq \varnothing$, 取 $y \in (x,c)$, 则 $[x,y] \subset [x,c) \subset A$, 于是 $[x,y]$ 被 $\mathscr{A}$ 中的一个元素 A 覆盖.

令

$$C = \{y \in (a,b] : [a,y] \text{ 能被 } \mathscr{A} \text{ 中的有限子族覆盖}\}.$$

由 (1), $C \neq \varnothing$, 且 C 是有上界的集合, 所以 C 有上确界. 令 $c = \sup C$, 则 $a < c \leqslant b$.

(2) $c \in C$, 即 $[a,c]$ 能被 $\mathscr{A}$ 的有限子族覆盖.

因为 $c \in (a,b]$, 存在 $A \in \mathscr{A}$ 使得 $c \in A$. 又由于 A 是 $[a,b]$ 中的开集, 存在 $d \in [a,b]$ 使得 $(d,c] \subset A$. 如果 $c \notin C$, 由 C 的定义, 则 $(d,c] \cap C = \varnothing$. 这与 c 的上确界性质矛盾. 故 $c \in C$.

(3) $c = b$, 即 $[a,b]$ 能被 $\mathscr{A}$ 的有限子族覆盖.

假设 $c < b$. 取 $x = c$, 利用 (1), 存在 $y \in (c,b]$, 使得 $[c,y]$ 可用 $\mathscr{A}$ 中至多两个元素覆盖. 由 (2), $y \in C$. 这与 $c = \sup C$ 矛盾, 故 $c = b$. □

由此, 实空间 $\mathbb{R}$ 中的每个闭区间是紧的.

下面讨论紧子空间的性质, 涉及遗传性、映射性质和有限可积性. 设 Y 是拓扑空间 X 的子空间. 如果 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族且 $Y \subset \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$, 则称 $\mathscr{A}$ *覆盖* Y.

引理 3.6.1　如果 Y 是拓扑空间 X 的子空间, 则 Y 是紧的当且仅当由 X 中开集组成的 Y 的每个覆盖都有有限子覆盖.

证明　设 Y 是紧的且 $\mathscr{A}$ 是由 X 中开集组成的 Y 的覆盖, 那么 $\mathscr{A}' = \{Y \cap A : A \in \mathscr{A}\}$ 是子空间 Y 的开覆盖. 因此, $\mathscr{A}'$ 有有限子覆盖 $\{Y \cap A_i\}_{i \leqslant m}$. 于是, $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\{A_i\}_{i \leqslant m}$ 覆盖 Y.

反之, 设 $\mathscr{A}$ 是子空间 Y 的开覆盖. 对每个 $A \in \mathscr{A}$, 存在 X 中的开集 U_A 使得 $A = Y \cap U_A$. 因此, $\mathscr{U} = \{U_A : A \in \mathscr{A}\}$ 是由 X 中开集组成的 Y 的覆盖. 根据假设, $\mathscr{U}$ 的某有限子族 $\{U_{A_i}\}_{i \leqslant n}$ 覆盖 Y. 于是, $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\{A_i\}_{i \leqslant n}$ 覆盖 Y. 故 Y 是紧的. □

定理 3.6.2　紧空间的每个闭子集是紧的.

证明　设 Y 是紧空间 X 的闭子集. 若 $\mathscr{A}$ 是由 X 中开集组成的 Y 的覆盖, 则 $\mathscr{A} \cup \{X - Y\}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的紧性, 它存在有限子覆盖, 记为 $\{A_i \in \mathscr{A} :$

$1 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{X - Y\}$. 因此, $Y \subset \bigcup_{i \leqslant m} A_i$. 于是, $\mathscr{A}$ 有有限子族覆盖 Y. 根据引理 3.6.1, Y 是紧的. □

紧空间的子空间不一定是紧的. 例如, 在例 3.6.1 的 (4) 中, $X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是紧的, 但它的子空间 $\{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是无限的离散空间, 所以不是紧的.

让 X 是无限集, 赋予有限补拓扑, 则 X 是 T_1 的紧空间 (见习题 3.6.1). 显然, X 的每个子空间也是有限补空间 (见习题 2.4.5), 所以也是紧空间, 但是 X 的真闭子集都是有限集. 从而 X 的紧子集不一定是闭的. 但对 Hausdorff 空间, 情况发生了变化.

引理 3.6.2 如果 A, B 是 Hausdorff 空间 X 中不相交的紧子集, 则存在 X 的开集 U, V 使得 $A \subset U$, $B \subset V$ 且 $U \cap V = \varnothing$.

证明 取定 $x \in A$. 对任意的 $y \in B$, 则 $x \neq y$. 由于 X 是 Hausdorff 空间, 存在 X 中不相交的开集 U_y 及 V_y 使得 $x \in U_y$ 和 $y \in V_y$. 令 $\mathscr{V} = \{V_y : y \in B\}$, 则 $\mathscr{V}$ 是 X 中的开集族且覆盖 B. 由引理 3.6.1, 存在 $\mathscr{V}$ 的有限子族 $\{V_{y_i}\}_{i \leqslant m}$ 覆盖 B. 令 $U_x = \bigcap_{i \leqslant m} U_{y_i}$, $V_x = \bigcup_{i \leqslant m} V_{y_i}$, 则 U_x 和 V_x 是 X 中分别包含 x 与 B 的不相交开集.

现在, 对每个 $x \in A$, 由上段所证, 存在 X 中不相交的开集 U_x, V_x 使得 $x \in U_x$, $B \subset V_x$. 令 $\mathscr{U} = \{U_x : x \in A\}$, 则 $\mathscr{U}$ 是 X 中开集组成的 A 的覆盖. 由 A 的紧性, $\mathscr{U}$ 的某有限子族 $\{U_{x_j}\}_{j \leqslant n}$ 覆盖 A. 令 $U = \bigcup_{j \leqslant n} U_{x_j}$, $V = \bigcap_{j \leqslant n} V_{x_j}$, 则 U 和 V 是 X 的不相交开集, 分别包含 A 和 B. □

定理 3.6.3 Hausdorff 空间的每个紧子集是闭的.

证明 设 Y 是 Hausdorff 空间 X 的紧子集. 对每个 $x \in X - Y$, 由引理 3.6.2, 存在 X 中不相交的开集 U, V 分别包含 x 和 Y. 于是, $x \in U \subset X - V \subset X - Y$. 由定理 2.1.1, $X - Y$ 是开集, 从而 Y 是闭集. □

根据定理 3.6.2 和引理 3.6.2, 可得下述定理.

定理 3.6.4 紧的 Hausdorff 空间是正规的.

关于紧空间的映射定理如下.

定理 3.6.5 紧空间的连续像是紧的, 即连续映射保持紧性.

证明 设 X 是紧空间且 $f : X \to Y$ 是连续映射. 让 $\mathscr{A}$ 是由 Y 中的开集组成的 $f(X)$ 的覆盖. 因为 f 连续, 则 $\{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{A}\}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的紧性, 它的某有限子族 $\{f^{-1}(A_i)\}_{i \leqslant m}$ 覆盖 X. 从而, $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\{A_i\}_{i \leqslant m}$ 覆盖 $f(X)$, 所以 $f(X)$ 是紧的. □

由此, 紧性是拓扑性质.

定理 3.6.6 (最值定理) 设函数 $f : X \to Y$ 连续, Y 是序拓扑空间. 如果 X 是

紧空间, 则 X 中存在点 x_0 和 x_1, 使得对任意 $x \in X$, 有 $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$.

证明　由定理 3.6.5, $A = f(X)$ 是 Y 的紧子集. 往证 A 有最大元和最小元.

如果 A 没有最大元, 则 Y 的开集族 $\{(-\infty, a) : a \in A\}$ 是 A 的覆盖. 由 A 的紧性, 它的某有限子族 $\{(-\infty, a_i)\}_{i \leqslant m}$ 覆盖 A. 设 $a_j = \max\limits_{i \leqslant m}\{a_i\}$, 则 $a_j \in A$. 但 $a_j \notin (-\infty, a_i)$, $i \leqslant m$. 这与 $\{(-\infty, a_i)\}_{i \leqslant m}$ 覆盖 A 矛盾. 故 A 有最大元. 同理, A 有最小元.

设 a 和 b 分别是 A 的最小元和最大元, 则存在 x_0, $x_1 \in X$, 使得 $f(x_0) = a$ 和 $f(x_1) = b$. 因此, 对任意的 $x \in X$, 有 $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$. □

定理 3.6.7　紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射是闭映射.

证明　设 $f : X \to Y$ 是连续映射, 其中 X 是紧空间, Y 是 Hausdorff 空间. 如果 F 是 X 的任意一个闭集, 根据定理 3.6.2, 则 F 是 X 的紧集. 由于 $f|_F : F \to Y$ 连续, 根据定理 3.6.5, $f(F)$ 是 Y 的紧集. 因为 Y 是 Hausdorff 空间, 根据定理 3.6.3, $f(F)$ 在 Y 中是闭的, 所以 f 是闭的. □

由此可知, 例 2.4.4 中的函数 $g : I \to \mathbb{S}^1$ 是闭映射.

推论 3.6.1　紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射是同胚.

引理 3.6.3 (管形引理)　设 X 是拓扑空间, Y 是紧空间, $x_0 \in X$. 如果积空间 $X \times Y$ 中的开集 $U \supset \{x_0\} \times Y$, 则存在 X 中包含 x_0 的开集 W, 使得 $W \times Y \subset U$.

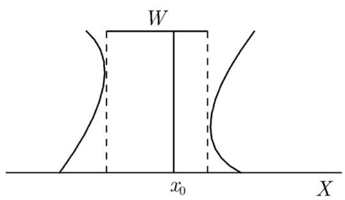


图 3.6.1

证明　对任意的 $y \in Y$, 有 $(x_0, y) \in U$. 分别存在 X 与 Y 的开集 U_y 和 V_y, 使得 $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset U$. 集族 $\mathscr{V} = \{V_y : y \in Y\}$ 是 Y 的开覆盖. 由 Y 的紧性, $\mathscr{V}$ 有有限的子覆盖 $\{V_{y_i}\}_{i \leqslant m}$. 令 $W = \bigcap\limits_{i \leqslant m} U_{y_i}$, 则 W 是 X 中含 x_0 的开集且 $W \times Y \subset U$, 见图 3.6.1. 事实上, 对任意的 $(x, y) \in W \times Y$, 存在 $j \leqslant m$, 使得 $y \in V_{y_j}$, 而 $x \in W \subset U_{y_j}$, 所以 $(x, y) \in U_{y_j} \times V_{y_j} \subset U$. □

管形引理中, 拓扑空间 Y 的紧性是重要的. 例如, 在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 取

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \frac{1}{1 + y^2}\right\},$$

则 U 是 $\mathbb{R}^2$ 中包含 $\{0\} \times \mathbb{R}$ 的开集. 但不存在 $\mathbb{R}$ 中包含 0 的开集 W, 使得 $W \times \mathbb{R} \subset U$.

定理 3.6.8　紧空间性质是有限可积性.

证明　仅证两个紧空间的积空间是紧空间 (类似定理 3.2.6 的说明).

设 X 和 Y 都是紧空间, $\mathscr{A}$ 是 $X \times Y$ 的开覆盖. 对每个 $x \in X$, 由于 $\{x\} \times Y$ 同胚于 Y, 所以 $\{x\} \times Y$ 是紧空间. 根据引理 3.6.1, 存在 $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\mathscr{A}_x$ 覆盖

$\{x\}\times Y$. 令 $U_x = \bigcup_{A\in\mathscr{A}_x} A$, 则 U_x 是 $X\times Y$ 中包含 $\{x\}\times Y$ 的开集. 根据管形引理, 存在 X 中包含 x 的开集 W_x, 使得 $W_x\times Y\subset U_x$.

令 $\mathscr{W}=\{W_x : x\in X\}$, 则 $\mathscr{W}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的紧性, 存在 $\mathscr{W}$ 的有限子族 $\{W_{x_i}\}_{i\leqslant m}$ 覆盖 X. 从而, $X\times Y=\bigcup_{i\leqslant m}(W_{x_i}\times Y)$. 令 $\mathscr{A}'=\bigcup_{i\leqslant m}\mathscr{A}_{x_i}$, 则 $\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的有限子族且覆盖 $X\times Y$. 故 $X\times Y$ 是紧空间. □

由定理 3.6.8 和定理 3.6.5, 例 2.6.2 中的环面、Möbius 带、Klein 瓶都是紧空间. 下面例子将利用紧性说明正规空间的子空间未必是正规空间.

例 3.6.2　正规空间 $[0,\omega_1]^2$ 的非正规子空间 $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$.

由定理 3.6.1 和定理 3.6.8, $[0,\omega_1]^2$ 是紧空间. 再由定理 3.6.4, $[0,\omega_1]^2$ 是正规空间. 下面证明 $[0,\omega_1]^2$ 的子空间 $X=[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 不是正规空间.

令

$$\varDelta=\{(x,x)\in[0,\omega_1]^2:\ x\in[0,\omega_1]\}.$$

由于 $[0,\omega_1]$ 是 Hausdorff 空间, 则 $\varDelta$ 是 $[0,\omega_1]^2$ 中的闭集 (见习题 3.4.3). 令

$$A=\varDelta\cap X=\varDelta-\{(\omega_1,\omega_1)\},\quad B=[0,\omega_1)\times\{\omega_1\},$$

则 A 与 B 是 X 中不相交的非空闭集. 要证 X 不是正规空间, 只需证如果 G 和 H 是 X 中分别包含 A 和 B 的开集, 则 $G\cap H\neq\varnothing$.

假设 $G\cap H=\varnothing$. 对任意的 $x\in[0,\omega_1)$, 有 $(x,\omega_1)\in H$, 存在 β $(x<\beta<\omega_1)$, 使得 $\{x\}\times[\beta,\omega_1]\subset H$. 从而, $(\{x\}\times[\beta,\omega_1])\cap G=\varnothing$. 令

$$\beta(x)=\min\{\beta<\omega_1 : x<\beta,(x,\beta)\notin G\},$$

则 $x<\beta(x)<\omega_1$ 且 $(x,\beta(x))\notin G$, 见图 3.6.2.

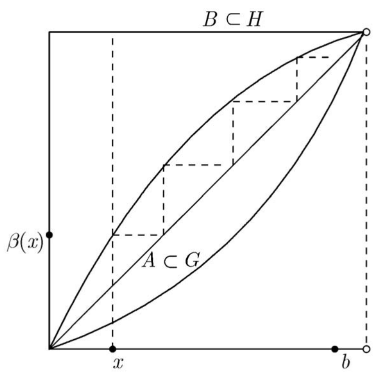


图 3.6.2

取定 $x_1\in[0,\omega_1)$, 定义 $x_2=\beta(x_1)$. 一般地, 定义 $x_{n+1}=\beta(x_n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, 则 $\{x_n\}$ 是 $[0,\omega_1)$ 中严格单调增加的序列. 根据推论 1.2.1, 可数集 $\{x_n : n\in\mathbb{Z}_+\}$ 在 $[0,\omega_1)$ 中有上界, 因而有上确界. 记 $b=\sup\{x_n : n\in\mathbb{Z}_+\}$. 由于 $\{x_n\}$ 的严格单调增加性, 所以它收敛于 b. 于是, 序列 $\{\beta(x_n)\}$ 也收敛于 b. 因此, 积空间 $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 中的序列 $\{(x_n,\beta(x_n))\}$ 收敛于 (b,b). 因为 $(b,b)\in A\subset G$, 所以当 n 充分大时, 有 $(x_n,\beta(x_n))\in G$. 这与任意 $x\in[0,\omega_1),(x,\beta(x))\notin G$ 矛盾. 这表明 $G\cap H\neq\varnothing$.

定义 3.6.3　设 (X,d) 是度量空间, $A\subset X$. 如果存在实数 $M>0$, 使得任意

$x, y \in A$ 有 $d(x,y) \leqslant M$, 则称 A 是 X 的有界集, M 是 A 的 界. 如果 A 不是有界集, 则称 A 是无界集.

如果 A 是非空的有界集, 则数 $\sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$ 称为 A 的直径, 记作 $\mathrm{diam}A$.

约定: 如果 $A = \varnothing$, 则 $\mathrm{diam}A = 0$; 如果 A 是无界集, 则 $\mathrm{diam}A = +\infty$.

定理 3.6.9　如果 A 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则 A 是紧的当且仅当 A 是闭的且关于 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量 d 或平方度量 ρ 是有界的.

证明　对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有 $\rho(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant \sqrt{n}\rho(x,y)$, 所以 A 在 $\mathbb{R}^n$ 中关于 ρ 有界当且仅当关于 d 有界. 因此, 只考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的平方度量 ρ.

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是紧的. 由于 $\mathbb{R}^n$ 是 Hausdorff 空间, 根据定理 3.6.3, A 是闭的.

记 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$, 令 $\mathscr{U} = \{B_\rho(\mathbf{0}, m) : m \in \mathbb{Z}_+\}$, 则 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集族且覆盖 A. 由引理 3.6.1, $\mathscr{U}$ 中某有限子族 $\{B_\rho(\mathbf{0}, m_i)\}_{i \leqslant k}$ 覆盖 A. 取 $M = \max\limits_{i \leqslant k}\{m_i\}$, 则 $A \subset B_\rho(\mathbf{0}, M)$. 于是, 对任意的 $x, y \in A$, 有 $\rho(x,y) \leqslant \rho(\mathbf{0}, x) + \rho(\mathbf{0}, y) < 2M$. 这表明 A 关于 ρ 是有界的.

反之, 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集且关于 ρ 有界. 让 M 是 A 关于 ρ 的上界, 即对任意的 $x, y \in A$, 有 $\rho(x,y) \leqslant M$. 取定点 $x_0 \in A$, 令 $b = \rho(\mathbf{0}, x_0) + M$, 则对任意的 $x \in A$, 有 $\rho(\mathbf{0}, x) \leqslant \rho(\mathbf{0}, x_0) + \rho(x_0, x) \leqslant \rho(\mathbf{0}, x_0) + M = b$. 因此, $A \subset [-b,\ b]^n \subset \mathbb{R}^n$. 根据定理 3.6.1 和定理 3.6.8, $[-b,\ b]^n$ 是紧的. 于是, A 作为 $[-b,\ b]^n$ 的闭子集也是紧的. □

上述定理给我们判定 $\mathbb{R}^n$ 中的紧子集带来了许多便利. 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的子集 $A = \{(x, 1/x) :\ 0 < x \leqslant 1\}$ 是闭的, 但不是有界的, 所以它不是紧的; 集合 $S = \{(x, \sin(1/x) :\ 0 < x \leqslant 1\}$ 是有界的, 但不是闭的, 所以它不是紧的. n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 和闭的单位球体 $\mathbb{B}^n$ 都是有界的闭集, 所以它们都是紧的. 另一方面, 对于一般的度量空间 X 而言, X 的每个紧子集是有界的闭集, 但是并非 X 的每个有界闭子集都是紧的.

习　题　3.6

3.6.1　证明: 有限补空间是紧空间.

3.6.2　(1) 证明: 拓扑空间中任何一族紧闭子集的交集还是紧子集.

(2) 设 (X, τ_0) 是拓扑空间. 取定 $\infty \notin X$, 令 $Y = X \cup \{\infty\}$. Y 的子集族 τ 满足: ① $\tau_0 \subset \tau$; ② $Y - C \in \tau$, 其中 C 为 X 中的紧闭子集. 证明: τ 是 Y 上的拓扑.

3.6.3　问: (1) T_1 空间中任何一族紧子集的交集是否紧子集?

(2) T_1 空间中任一紧子集的闭包是否紧子集?

3.6.4　设 X, Y 都是拓扑空间, $f : X \to Y$ 是闭的连续、满映射, 且对每个 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集. 证明:

(1) 若 Y 是紧空间, 则 X 是紧空间;

(2) 若 X 是 Hausdorff 空间, 则 Y 是 Hausdorff 空间;

(3) 若 X 是正则空间, 则 Y 是正则空间.

3.6.5 设 X 关于拓扑 τ 和 τ' 都是紧的 Hausdorff 空间. 证明: 或者 τ 与 τ' 相等, 或者它们不能比较.

3.6.6 设 X 是紧空间, Y 是拓扑空间. 利用管形引理 (见引理 3.6.3) 证明: 投射 $\pi_2 : X \times Y \to Y$ 是闭映射.

3.6.7 设 X, Y 都是拓扑空间, 函数 $f : X \to Y$ 具有*闭图性质*, 即 f 的图 $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ 是积空间 $X \times Y$ 的闭子集. 证明: 若 C 是 Y 的紧子集, 则 $f^{-1}(C)$ 是 X 的闭子集.

3.6.8 设 X 是完全正则空间, A, B 是 X 中不相交的闭子集. 证明: 如果 A 是紧的, 则存在连续函数 $f : X \to [0, 1]$ 使得当 $x \in A$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \in B$ 时, $f(x) = 1$.

3.6.9 (Wallace *定理*, 1955) 设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 证明: 如果 A 和 B 分别是 X 和 Y 的紧子集, W 是积空间 $X \times Y$ 中包含 $A \times B$ 的开集, 则分别存在 X, Y 的开集 U, V, 使得 $A \times B \subset U \times V \subset W$.

3.7 可 数 性

可数性通过拓扑空间的一些可数子集或可数子集族刻画空间的性质. 常用的可数性有第一可数性、第二可数性、可分性、Lindelöf 性质等, 它们与拓扑空间的可度量性、分离性、紧性等关系密切.

定义 3.7.1 设 X 是拓扑空间. 如果 $x \in X$ 且 x 在 X 中具有可数的邻域基, 则称 X 在点 x 是*第一可数的*. 如果 X 中的每一点是第一可数的, 则称 X 满足*第一可数性公理*或 X 是*第一可数空间*.

这一概念在引理 3.1.1 和定理 3.1.7 中已使用过. 我们已证明了度量空间是第一可数的. 在引理 3.1.1 的证明中还使用了下列技巧: 拓扑空间 X 在点 x 具有可数的邻域基当且仅当 x 在 X 中存在递减开集的序列, 构成 x 的邻域基. 事实上, 设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 在 x 的可数的邻域基. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令 $V_n = \bigcap\limits_{i\leqslant n} U_i^\circ$, 则 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 中的递减的开集序列且为点 x 的邻域基; 反之是显然的.

例 3.1.3 表明, 良序空间 $[0, \omega_1]$ 不是第一可数空间.

定理 3.7.1 第一可数性是遗传性.

证明 设 X 是第一可数空间, Y 是 X 的子空间. 对每个 $y \in Y$, y 在 X 中具有可数的邻域基 $\mathscr{V}$, 则 $\mathscr{V}' = \{V \cap Y : V \in \mathscr{V}\}$ 是 y 在 Y 中可数的邻域基. □

第一可数性是一种局部的可数性. 我们更关心整体的可数性.

定义 3.7.2 如果拓扑空间 X 有一个基由可数个元素组成, 简称 X 具有可数基, 则称 X 满足*第二可数性公理*或 X 是*第二可数空间*.

实空间 $\mathbb{R}$ 是第二可数的, 因为集族 $\{(a,b): a<b,\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的可数基.

易知, 满足第二可数性公理的空间都满足第一可数性公理, 反之不真. 例如, 含有不可数个元素的离散空间是第一可数的, 但不是第二可数的.

与定理 3.7.1 类似, 有下列结果.

定理 3.7.2　第二可数性是遗传性.

易验证, 第一可数性、第二可数性都是有限可积性. 我们更关心可数个拓扑空间乘积所具有的拓扑性质. 如何定义可数乘积拓扑? 作为更一般的讨论, 下面介绍有限积拓扑的一种合适的推广: Tychonoff 拓扑. 由定理 2.5.3, 引入下述定义.

定义 3.7.3 (A. Tychonoff, 1930)　设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是拓扑空间的族. 记 $X=\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha$. 以集族

$$\mathscr{S}=\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha): U_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 中的开集},\ \alpha\in J\}$$

为子基生成的拓扑称为 X 上的*积拓扑*或 Tychonoff *拓扑*, 其中每个 $\pi_\alpha: X\to X_\alpha$ 都是投射. X 具有这个拓扑称为空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的*积空间*或 Tychonoff *积空间*. 除非特别说明, 积空间 $X=\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha$ 特指 X 上具有积拓扑.

若 $\mathscr{B}$ 是由子基 $\mathscr{S}$ 生成的积拓扑的基, 则

$$\mathscr{B}=\left\{\bigcap_{\alpha\in J'}\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha): J' \text{ 是 } J \text{ 的有限子集},\ U_\alpha \text{ 是 } X_\alpha \text{ 中的开集},\ \alpha\in J\right\}.$$

$\mathscr{B}$ 中的元称为 X 的*基本开集*或*典范开集*. 易知, 对每个 $B\in\mathscr{B}$, 有 $B=\prod\limits_{\alpha\in J}U_\alpha$, 其中每个 U_α 是 X_α 中的开集且除有限个 α 外, $U_\alpha=X_\alpha$. 从而, 积拓扑是有限积空间拓扑的自然推广.

设 $X=\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是积空间. 对每个 $\alpha\in J$, 如同定理 2.5.2, 投射 $\pi_\alpha: X\to X_\alpha$ 是连续的开、满映射; 如同定理 2.5.4, 从拓扑空间映入积空间的函数是连续的当且仅当它的每个坐标函数是连续的.

下列结果如定理 2.5.1.

引理 3.7.1　设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是拓扑空间的族. 如果对每个 $\alpha\in J$, $\mathscr{B}_\alpha$ 是 X_α 的基, 则集族

$$\mathscr{B}'=\left\{\prod_{\alpha\in J}B_\alpha: \text{除有限个 } \alpha\in J \text{ 有 } B_\alpha\in\mathscr{B}_\alpha \text{ 外, 其余的 } B_\alpha=X_\alpha\right\}$$

是 $X=\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha$ 上积拓扑的基.

证明 显然, $\mathscr{B}'$ 中的元是积空间 X 的开集. 设 U 是 X 中的开集且 $x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in U$, 则存在 X 的基本开集 B 使得 $x\in B\subset U$. 记 $B=\prod\limits_{\alpha\in J}U_\alpha$, 其中当 $\alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in J$ 时, $U_\alpha=X_\alpha$. 对 $\alpha\in\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$, 因为 $x_\alpha\in U_\alpha$ 且 $\mathscr{B}_\alpha$ 是 X_α 的基, 存在 $B_\alpha\in\mathscr{B}_\alpha$ 使得 $x_\alpha\in B_\alpha\subset U_\alpha$. 令 $B'=\prod\limits_{\alpha\in J}B_\alpha$, 其中当 $\alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 时, $B_\alpha=X_\alpha$, 则 $B'\in\mathscr{B}'$ 且 $x\in B'\subset U$. 从而, $\mathscr{B}'$ 是 X 的基. □

设 $\mathscr{P}$ 表示拓扑空间的某种性质. 如果 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是具有性质 $\mathscr{P}$ 的任意拓扑空间的集族 (且 J 是可数指标集), 则积空间 $\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha$ 也具有性质 $\mathscr{P}$, 那么称 $\mathscr{P}$ 是**可积性** (**可数可积性**).

定理 3.7.3 第一可数性、第二可数性都是可数可积性.

证明 仅就第二可数空间的情况给出证明.

设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是第二可数空间的族. 对任意的 $i\in\mathbb{Z}_+$, 让 $\mathscr{B}_i$ 是 X_i 的可数基. 令

$$\mathscr{B}=\left\{\prod_{i\in\mathbb{Z}_+}U_i:\ \text{对有限个 } i\in\mathbb{Z}_+,\ U_i\in\mathscr{B}_i,\ \text{其余的 } U_i=X_i\right\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是可数的且为 $X=\prod\limits_{i\in\mathbb{Z}_+}X_i$ 的基. 故 X 是第二可数空间. □

从而, 积空间 $\mathbb{R}^\omega$ 是第二可数的.

例 3.7.1 不可数个实空间 $\mathbb{R}$ 的积空间不是第一可数的.

证明 设 J 是任意不可数的指标集, 证明积空间 $X=\mathbb{R}^J$ 不是第一可数的. 取定 $\mathbf{0}=(0_\alpha)_{\alpha\in J}\in X$, 其中每个 $0_\alpha=0\in\mathbb{R}$. 再令

$$A=\{(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in X:\text{除有限个 } x_\alpha=0 \text{ 外, 其余的 } x_\alpha=1\},$$

则 $\mathbf{0}\in\overline{A}$.

事实上, 让 U 是 X 中含有点 $\mathbf{0}$ 的基本开集, 记

$$U=\prod_{\alpha\in J}U_\alpha,\ \text{其中当 } \alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in J \text{ 时},\ U_\alpha=\mathbb{R}.$$

令 $z=(z_\alpha)_{\alpha\in J}\in X$, 满足

$$z_\alpha=\begin{cases}0, & \alpha=\alpha_i,\ \exists\, i\leqslant n,\\ 1, & \alpha\neq\alpha_i,\ \forall\, i\leqslant n,\end{cases}$$

则 $z\in A\cap U$. 因此, $\mathbf{0}\in\overline{A}$.

若 X 是第一可数空间, 由引理 3.1.1 的 (2), 则存在 A 中的序列 $\{a_n\}$ 收敛于 $\mathbf{0}$. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 记 $a_n = (a_{n,\alpha})_{\alpha\in J} \in A$, 存在 J 的有限子集 J_n, 使得 $\alpha \in J_n \Leftrightarrow a_{n,\alpha} = 0$. 因为 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} J_n$ 是可数集, 而 J 是不可数集, 所以存在 $\beta \in J - \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} J_n$. 设 $V_\beta = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, 令 $V = \pi_\beta^{-1}(V_\beta)$, 其中 π_β 是 X 到第 β 个坐标空间 $\mathbb{R}$ 的投射, 则 V 是 $\mathbf{0}$ 在 $\mathbb{R}^J$ 中的邻域. 因为对任意的 $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_{n,\beta} = 1 \notin V_\beta$, 所以 $a_n \notin V$. 这与 $\{a_n\}$ 收敛于 $\mathbf{0}$ 矛盾. 从而, $\mathbb{R}^J$ 不是第一可数空间.

定义 3.7.4　设 X 是拓扑空间, $A \subset X$. 如果 $\overline{A} = X$, 则称 A 是 X 的稠密子集. 如果 X 有可数的稠密子集, 则称 X 是可分空间.

实空间 $\mathbb{R}$ 是可分的, 因为有理数集 $\mathbb{Q}$ 是它的可数的稠密子集.

定理 3.7.4　第二可数空间是可分空间.

证明　设 $\mathscr{B}$ 是第二可数空间 X 的可数基. 记 $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 取定 $b_n \in B_n$. 令 $A = \{b_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, 则 A 是可数集且 $\overline{A} = X$. 事实上, 对任意的 $x \in X$ 及 X 中任意一个包含 x 的开集 U, 存在 $B_n \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B_n \subset U$, 于是 $b_n \in A \cap U$, 故 $x \in \overline{A}$. □

易验证, 可分性是可数可积性 (见习题 3.7.6).

定义 3.7.5　设 X 是拓扑空间. 如果 X 的每个开覆盖都有可数的子覆盖, 则称 X 是 Lindelöf 空间.

显然, 紧空间是 Lindelöf 的. 由可数个点组成的离散空间是 Lindelöf 空间, 但不是紧空间.

定理 3.7.5　第二可数空间是 Lindelöf 空间.

证明　设 $\mathscr{B}$ 是第二可数空间 X 的可数基. 对 X 的任意一个开覆盖 $\mathscr{A}$, 令 $\mathscr{B}' = \{B \in \mathscr{B} :$ 存在 $A \in \mathscr{A}$ 使得 $B \subset A\}$, 则 $\mathscr{B}'$ 是可数的, 记 $\mathscr{B}' = \{B_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. 因而, 对任意的 $n \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $A_n \in \mathscr{A}$ 使得 $B_n \subset A_n$. 这时, $\{A_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的可数子族. 往证它覆盖 X.

对任意的 $x \in X$, 存在 $A \in \mathscr{A}$ 使得 $x \in A$. 因为 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 存在 $B \in \mathscr{B}$, 使得 $x \in B \subset A$. 于是 $B \in \mathscr{B}'$, 所以存在 $m \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $B = B_m$, 从而 $x \in B_m \subset A_m$. 因此, $\{A_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 X 的覆盖. 故 X 是 Lindelöf 空间. □

定理 3.7.6　正则的 Lindelöf 空间是正规的.

证明　设 A, B 是正则 Lindelöf 空间 X 中不相交的闭集. 对每个 $x \in A \subset X - B$, 根据定理 3.4.4, 存在 x 的开邻域 U_x 使得 $\overline{U}_x \subset X - B$, 即 $\overline{U}_x \cap B = \varnothing$. 令 $\mathscr{U} = \{U_x : x \in A\}$, 则 $\mathscr{U} \cup \{X - A\}$ 是 X 的开覆盖. 由于 X 是 Lindelöf 空间, 它有可数子覆盖 $\{U_{x_n} : n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{X - A\}$. 记 $U_n = U_{x_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. 因此, $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n$

且每个 $\overline{U}_n \cap B = \varnothing$. 同理, 存在 X 中的开集列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, 使得 $B \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} V_n$ 且每个 $\overline{V}_n \cap A = \varnothing$.

对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i\leqslant n} \overline{V}_i, \quad V'_n = V_n - \bigcup_{i\leqslant n} \overline{U}_i.$$

那么对 $n,\ m \in \mathbb{Z}_+$, $U'_n \cap V'_m = \varnothing$. 再令

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} U'_n, \quad V = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} V'_n,$$

则 U 和 V 是 X 中分别包含 A 和 B 的不相交开集. 因此, X 是正规空间. □

根据定理 3.7.5 和定理 3.7.6, 可得

推论 3.7.1 第二可数的正则空间是正规的.

例 3.7.2 下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$ 是第一可数的、可分的、Lindelöf 空间, 但不是第二可数空间. Sorgenfrey 平面 $\mathbb{R}_l^2$ 不是 Lindelöf 空间.

对每个 $x \in \mathbb{R}_l$, 集族 $\{[x, x+1/n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 x 的可数的局部基, 所以 $\mathbb{R}_l$ 是第一可数的.

因为 $\mathbb{R}_l$ 的每个基元素 $[a,b)$ $(a, b \in \mathbb{R}_l,\ a < b)$ 都与 $\mathbb{Q}$ 相交, 所以 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}_l$ 的可数的稠密子集, 故 $\mathbb{R}_l$ 是可分的. 而 $\mathbb{Q}^2$ 是 $\mathbb{R}_l^2$ 的可数的稠密子集, 从而 $\mathbb{R}_l^2$ 也是可分空间. 若令 $L = \{(a,b) \in \mathbb{R}_l^2 : a + b = 0\}$, 则 L 作为 $\mathbb{R}_l^2$ 的闭的子空间具有离散拓扑且 L 是不可数集, 所以 L 没有可数的稠密子集, 故 L 不是可分的.

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 $\mathbb{R}_l$ 的任一开覆盖. 对每个 $\alpha \in J$, 以 U_α° 记 U_α 在实空间 $\mathbb{R}$ 中的内部. 由于实空间 $\mathbb{R}$ 的任何子空间都具有可数基 (见定理 3.7.2), 所以是 Lindelöf 的, 作为 $U = \bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha^\circ$ 的开覆盖 $\{U_\alpha^\circ\}_{\alpha\in J}$, 具有可数子覆盖 $\{U_{\alpha_i}^\circ\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$. 置 $F = \mathbb{R}_l - U$, 下面证明 F 是可数集, 从而可被 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 中可数个元覆盖. 对每一点 $x \in F$, 存在 $\alpha \in J$ 使得 $x \in U_\alpha$, 从而存在 $y_x > x$ 使得 $[x,\ y_x) \subset U_\alpha$, 于是 $(x,\ y_x) \subset U$, 所以 $(x,\ y_x) \cap F = \varnothing$. 这样的开区间族 $\{(x,\ y_x)\}_{x\in F}$ 是两两互不相交的, 所以必须是可数的 (可利用实空间 $\mathbb{R}$ 的可分性), 从而 F 是可数集. 因此, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 中有可数子族覆盖 $\mathbb{R}_l$. 故 $\mathbb{R}_l$ 是 Lindelöf 空间. 由例 3.4.3, $\mathbb{R}_l^2$ 不是正规空间. 再由定理 3.7.6, $\mathbb{R}_l^2$ 不是 Lindelöf 空间.

设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{R}_l$ 的任意一个基. 对任意的 $x \in \mathbb{R}_l$ 及 $\mathbb{R}_l$ 中包含 x 的开集 $[x, x+1)$, 存在 $B_x \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B_x \subset [x, x+1)$, 于是 $x = \inf B_x$. 如果 $x, y \in \mathbb{R}_l$ 且 $x \neq y$, 则 $B_x \neq B_y$. 因而 $\{B_x : x \in \mathbb{R}_l\}$ 是 $\mathscr{B}$ 的不可数子族, 所以 $\mathscr{B}$ 是不可数的. 故 $\mathbb{R}_l$ 没有可数基.

Sorgenfrey 平面 $\mathbb{R}_l^2$ 说明:

(1) 两个 Lindelöf 空间的积空间未必是 Lindelöf 的;

(2) 可分空间未必是 Lindelöf 空间;

(3) 可分空间的闭子空间未必是可分空间.

例 3.7.3 良序空间 $[0,\omega_1)$ 是第一可数空间, 但不是可分空间、Lindelöf 空间.

设 $a\in[0,\omega_1)$. 如果 $a=0$, 则 $\{\{a\}\}$ 是 a 的局部基; 如果 $a\neq 0$, 则 $\{(b,a]:b<a\}$ 是 a 的可数的局部基. 故 $[0,\omega_1)$ 是第一可数空间.

设 C 是 $[0,\omega_1)$ 的任意可数子集. 存在 $b\in[0,\omega_1)$, 使得 b 是 C 的上界. 因而 $(b,\omega_1)\cap C=\varnothing$, 于是 C 不是 $[0,\omega_1)$ 的稠密子集. 故 $[0,\omega_1)$ 不是可分空间.

设 $\mathscr{A}=\{[0,b):b\in[0,\omega_1)\}$, 则 $\mathscr{A}$ 是 $[0,\omega_1)$ 的开覆盖, 它没有可数子覆盖. 事实上, 设 $\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的任意可数子族, 令 $b'=\sup\{b\in[0,\omega_1):[0,b)\in\mathscr{A}'\}$, 则 $b'<\omega_1$. 但对任意的 $A\in\mathscr{A}'$, $b'\notin A$. 因此 $\mathscr{A}'$ 不能覆盖 $[0,\omega_1)$, 所以 $[0,\omega_1)$ 不是 Lindelöf 空间.

由定理 3.7.5, $[0,\omega_1)$ 不是第二可数空间.

因为 $[0,\omega_1]$ 是紧空间, 所以它是 Lindelöf 空间. 而 $[0,\omega_1)\subset[0,\omega_1]$ 不是 Lindelöf 空间. 这也是 Lindelöf 空间的子空间不是 Lindelöf 的例子. 由于 $[0,\omega_1]$ 不是可分空间, 所以紧空间 (从而, Lindelöf 空间) 未必是可分空间.

习 题 3.7

3.7.1 证明: 连续的开映射保持第一可数性、第二可数性.

3.7.2 证明: 满足第一可数性公理的 T_1 空间中, 每个单点集是可数个开集的交.

3.7.3 证明: 拓扑空间满足第二可数性公理当且仅当它有可数子基.

3.7.4 设 X 是满足第二可数性公理的空间, A 是 X 的不可数子集. 证明: A 中有不可数个点都是 A 的聚点.

3.7.5 证明: 满足第二可数性公理的空间的每个基中都包含着这个空间的可数基.

3.7.6 证明: 可分性是可数可积性.

3.7.7 证明: 可分空间的连续像是可分空间.

3.7.8 证明: Lindelöf 空间的每个闭子空间是 Lindelöf 的.

3.7.9 设 U 是第二可数的正则空间 X 的开子集. 证明:

(1) U 可以表示为 X 中可数个闭子集的并;

(2) 存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使得当 $x\in U$ 时, $f(x)>0$; 当 $x\in X-U$ 时, $f(x)=0$.

3.7.10 证明: 有序矩形 I_0^2 是紧空间, 但是 $I\times(0,1)$ 作为 I_0^2 的子空间不是 Lindelöf 的.

3.8 Urysohn 度量化定理

寻求一般的拓扑空间或特定的拓扑空间是可度量化空间的充要条件称为度量

化问题. 本节将从两个方面讨论笛卡儿积 $\mathbb{R}^\omega$ 上赋予适当拓扑的度量化问题. 一是分析笛卡儿积 $\mathbb{R}^\omega$ 上的三种拓扑构造, 证明可度量性是可数可积性; 二是利用嵌入引理, 证明经典的 Urysohn 度量化定理: 具有可数基的正则空间是可度量化空间.

由定义 3.1.3, 我们已有了 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的度量. 讨论无限笛卡儿积 $\mathbb{R}^\omega$ 上的度量是很自然的课题. 将 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量 d 与平方度量 ρ 推广到 $\mathbb{R}^\omega$ 时, 未必有意义. 前者涉及无穷级数的收敛性问题, 后者涉及非负实数的集合的上确界的存在性问题. 对于后者, 用 $\mathbb{R}$ 中的度量 $\overline{d}(x,y)=\min\{|x-y|,1\}$ 来代替度量 $d(x,y)=|x-y|$, 将 ρ 推广到 $\mathbb{R}^\omega$ 上, 其定义就有意义了.

定理 3.8.1 设 (X,d) 是度量空间. $\overline{d}: X\times X\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\overline{d}(x,y)=\min\{d(x,y),1\},\quad x,\ y\in X,$$

则 $\overline{d}$ 是 X 上的度量, 且 $\overline{d}$ 和 d 诱导出 X 上相同的拓扑.

度量 $\overline{d}$ 称为相应于 d 的**标准有界度量**.

证明 易知, $\overline{d}$ 满足定义 3.1.1 的 (M1) 和 (M2). 下证 (M3) 也成立. 设 $x,y,z\in X$, 如果 $d(x,y)\geqslant 1$ 或 $d(y,z)\geqslant 1$, 则 $\overline{d}(x,z)\leqslant\overline{d}(x,y)+\overline{d}(y,z)$. 如果 $d(x,y)<1$ 且 $d(y,z)<1$, 则 $\overline{d}(x,z)\leqslant d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)=\overline{d}(x,y)+\overline{d}(y,z)$. 由定义 3.1.1, $\overline{d}$ 是 X 上的度量.

当 $0<\varepsilon<1$ 时, 对任意 $x\in X$, 有 $B_{\overline{d}}(x,\varepsilon)=B_d(x,\varepsilon)$, 所以度量 $\overline{d}$ 和 d 诱导出 X 上相同的拓扑. □

定义 3.8.1 设 $\{(X_\alpha,d_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ 是度量空间的族. 记 $X=\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha$. 对任意的 $x=(x_\alpha)_{\alpha\in J},\ y=(y_\alpha)_{\alpha\in J}\in X$, 令

$$\overline{\rho}(x,y)=\sup\{\overline{d}_\alpha(x_\alpha,y_\alpha):\alpha\in J\},$$

其中 $\overline{d}_\alpha$ 是相应于 d_α 的标准有界度量, 定义函数 $\overline{\rho}: X\times X\to\mathbb{R}$. $\overline{\rho}$ 是 X 上的度量, 它称为 X 上的**一致度量**, 由 $\overline{\rho}$ 所诱导的度量拓扑称为 X 上的**一致拓扑**.

对实空间 $(\mathbb{R},d)$ 及任意指标集 J, 上述定义导出了一致度量空间 $(\mathbb{R}^J,\overline{\rho})$. 下述例子表明一致拓扑不同于积拓扑.

例 3.8.1 $\mathbb{R}^\omega$ 在一致拓扑下不是第二可数空间.

令 $C=\{(x_n)\in\mathbb{R}^\omega: x_n=0$ 或 $1,\ n\in\mathbb{Z}_+\}$, 则 C 是 $\mathbb{R}^\omega$ 的不可数子集 (见习题 1.1.5) 且对 C 中任意不同的两点 x,y, 有 $\overline{\rho}(x,y)=1$.

设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{R}^\omega$ 上一致拓扑的基. 对任意的 $x\in C$, 有 $x\in B(x,1)$, 存在 $B_x\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B_x\subset B(x,1)$. 当 $y\in C-\{x\}$ 时, 有 $y\notin B(x,1)$, 于是 $B_y\neq B_x$. 由于 C 是不可数集, 集族 $\{B_x: x\in C\}$ 是 $\mathscr{B}$ 的不可数子集, 所以 $\mathscr{B}$ 是不可数的. 故在一致拓扑下, $\mathbb{R}^\omega$ 不是第二可数的.

现在回到 3.7 节定义的积拓扑. 作为有限积的推广形式可以是多样的, 引入以下的定义也是很自然的.

定义 3.8.2 设 $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ 是拓扑空间的族. 记 $X=\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha$. 令

$$\mathscr{B}=\left\{\prod_{\alpha\in J}U_\alpha: \text{对每个 } \alpha\in J,\ U_\alpha\in\tau_\alpha\right\}.$$

以 $\mathscr{B}$ 作为基生成 X 上的拓扑称为*箱拓扑*.

易见, 在有限个拓扑空间的笛卡儿积上, 箱拓扑与积拓扑是一致的; 在任意拓扑空间族的笛卡儿积上, 箱拓扑细于积拓扑. 下例说明从一定的角度上说箱拓扑的性质不如积拓扑好.

例 3.8.2 $\mathbb{R}^\omega$ 在箱拓扑下不是第一可数空间.

证明 取定 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots)\in\mathbb{R}^\omega$ 及 $A=\{(x_i)\in\mathbb{R}^\omega: x_i>0, i\in\mathbb{Z}_+\}$, 则 $\mathbf{0}\in\overline{A}$.

事实上, 让 U 是 $\mathbb{R}^\omega$ 中含有点 $\mathbf{0}$ 的基本开集, 不妨设 $U=\prod\limits_{i\in\mathbb{Z}_+}(a_i,b_i)$. 取 $z=(b_i/2)_{i\in\mathbb{Z}_+}$, 则 $z\in A\cap U$. 因此, $\mathbf{0}\in\overline{A}$.

若 $\mathbb{R}^\omega$ 是第一可数空间, 由引理 3.1.1 的 (2), 则存在 A 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 $\mathbf{0}$. 对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$, 记 $y_n=(y_{ni})_{i\in\mathbb{Z}_+}$, 则每个 $y_{ni}>0$. 令 $V=\prod\limits_{i\in\mathbb{Z}_+}(-y_{ii},y_{ii})$, 则 V 是 $\mathbb{R}^\omega$ 中含有点 $\mathbf{0}$ 的基本开集, 且对任意的 $n\in\mathbb{Z}_+$, $y_n\notin V$. 这与 $\{y_n\}$ 收敛于 $\mathbf{0}$ 矛盾. 从而, $\mathbb{R}^\omega$ 不是第一可数空间.

例 3.8.3 设 J 是任意的指标集. 在 $\mathbb{R}^J$ 上,

(1) 一致拓扑细于积拓扑;

(2) 箱拓扑细于一致拓扑.

证明 (1) 设 $x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\mathbb{R}^J$ 及积空间 $\mathbb{R}^J$ 中包含 x 的任意基本开集 $U=\prod\limits_{\alpha\in J}U_\alpha$, 其中当 $\alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in J$ 时, $U_\alpha=\mathbb{R}$. 对每个 $\alpha_i\in J$, 因为 U_{α_i} 是实空间 $(\mathbb{R},d)$ 中包含点 x_{α_i} 的开集, 所以存在 $\varepsilon_i>0$ 使得 $B_{\overline{d}}(x_{\alpha_i},\varepsilon_i)\subset U_{\alpha_i}$. 令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$, 则 $B_{\overline{\rho}}(x,\varepsilon)\subset U$. 事实上, 对任意的 $y=(y_\alpha)_{\alpha\in J}\in B_{\overline{\rho}}(x,\varepsilon)$, 当 $\alpha=\alpha_i$ 时, 有 $\overline{d}_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)<\varepsilon\leqslant\varepsilon_i$, 于是 $y_\alpha\in B_{\overline{d}}(x_{\alpha_i},\varepsilon_i)\subset U_{\alpha_i}$; 当 $\alpha\neq\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 时, 有 $y_\alpha\in U_\alpha=\mathbb{R}$. 从而, $y\in U$. 根据定理 2.2.2, 一致拓扑细于积拓扑.

(2) 设 $B_{\overline{\rho}}(x,\varepsilon)$ 是 $\mathbb{R}^J$ 中关于一致度量的任意球形邻域. 不妨设 $0<\varepsilon<1$. 对 $z\in B_{\overline{\rho}}(x,\varepsilon)$, 取定 δ 满足 $\overline{\rho}(x,z)<\delta<\varepsilon$, 并记 $x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}$, $z=(z_\alpha)_{\alpha\in J}$, 则当 $\alpha\in J$ 时有 $d(x_\alpha,z_\alpha)<\delta$, 于是存在 z_α 在实空间 $\mathbb{R}$ 中的开邻域 U_α 使得 $U_\alpha\subset B_{\overline{d}}(x_\alpha,\delta)$. 令 $U=\prod\limits_{\alpha\in J}U_\alpha$, 则 U 是 z 在箱拓扑下的开邻域且 $U\subset B_{\overline{\rho}}(x,\varepsilon)$. 根据定理 2.2.2, 箱拓扑细于一致拓扑.

设 J 是可数无限集. 由定理 3.7.3 和例 3.8.1, 在 $\mathbb{R}^J$ 上, 一致拓扑严格细于积拓扑; 由例 3.8.2, 在 $\mathbb{R}^J$ 上, 箱拓扑严格细于一致拓扑. 对于积空间, 下面定理肯定地回答了本节开头给出的问题: 积空间 $\mathbb{R}^\omega$ 是否可度量空间?

定理 3.8.2　可度量性是可数可积性.

证明　设 $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是度量空间列. 记 $X = \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} X_n$. 对 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$, $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}_+} \in X$, 令

$$D(x,y) = \sup\left\{\frac{\bar{d}_i(x_i,y_i)}{i} : i \in \mathbb{Z}_+\right\},$$

其中 $\overline{d}_i$ 是 (X_i, d_i) 上的标准有界度量, 则 $D : X\times X \to \mathbb{R}$ 是 X 上的度量.

事实上, D 显然满足定义 3.1.1 的 (M1) 与 (M2). 设 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$, $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$, $z = (z_i)_{i\in\mathbb{Z}_+} \in X$, 对任意的 $i \in \mathbb{Z}_+$, 有

$$\frac{\bar{d}_i(x_i,z_i)}{i} \leqslant \frac{\bar{d}_i(x_i,y_i)}{i} + \frac{\bar{d}_i(y_i,z_i)}{i} \leqslant D(x,y) + D(y,z).$$

因而

$$D(x,z) = \sup\left\{\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i} : i \in \mathbb{Z}_+\right\} \leqslant D(x,y) + D(y,z),$$

即 D 满足 (M3).

为了证明积空间 X 是可度量化空间, 只需证明由 D 诱导的 X 上的度量拓扑 τ_D 与 X 上的积拓扑 τ 一致.

对每个 $U \in \tau_D$ 及 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+} \in U$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_D(x,\varepsilon) \subset U$. 取 $m \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $1/m < \varepsilon$. 令

$$V = \left(\prod_{i\leqslant m} B_{\overline{d}_i}(x_i,\varepsilon)\right) \times \left(\prod_{i>m} X_i\right),$$

则 $V \in \tau$ 且 $x \in V \subset B_D(x,\varepsilon) \subset U$. 事实上, 对任意的 $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}_+} \in V$, 当 $i \leqslant m$ 时, $\overline{d}_i(x_i,y_i) < \varepsilon$; 当 $i > m$ 时, $\overline{d}_i(x_i,y_i)/i \leqslant 1/i < 1/m$. 因此

$$D(x,y) \leqslant \max_{i\leqslant m}\left\{\frac{\bar{d}_i(x_i,y_i)}{i}, \frac{1}{m}\right\} < \varepsilon.$$

从而, $\tau_D \subset \tau$.

另一方面, 设 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+} \in X$ 且 B 是 τ 中含有点 x 的基本开集. 记 $B = \prod\limits_{i\in\mathbb{Z}_+} U_i$, 其中当 $i > n$ 时, $U_i = X_i$. 对每个 $i \leqslant n$, 由于 $x_i \in U_i$, 存在正数 $\varepsilon_i < 1$ 使得 $B_{\overline{d}_i}(x_i,\varepsilon_i) \subset U_i$. 取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i/i : i \leqslant n\}$, 则 $0 < \varepsilon < 1$ 且 $x \in B_D(x,\varepsilon) \subset B$. 事实上, 对任意的 $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}_+} \in B_D(x,\varepsilon)$, 当 $i \leqslant n$ 时, 有

$$\frac{\bar{d}_i(x_i,y_i)}{i} \leqslant D(x,y) < \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon_i}{i},$$

即 $\overline{d}_i(x_i, y_i) < \varepsilon_i < 1$, 因而 $y_i \in B_{\overline{d}_i}(x_i, \varepsilon_i) \subset U_i$; 当 $i > n$ 时, 有 $y_i \in U_i = X_i$. 所以 $B_D(x, \varepsilon) \subset B$. 于是, $\tau \subset \tau_D$. 这就证明了 $\tau_D = \tau$. □

定理 3.8.2 及定理 3.7.3 表明, 积空间 $\mathbb{R}^\omega$ 是满足第二可数性公理的可度量化空间.

定理 3.8.3　设 (X, d) 是度量空间. 下列条件等价:

(1) X 是第二可数空间;

(2) X 是 Lindelöf 空间;

(3) X 是可分空间.

证明　由定理 3.7.5 得 (1) ⇒ (2). 下证 (2) ⇒ (3) ⇒ (1).

(2) ⇒ (3). 设 (X, d) 是 Lindelöf 的度量空间. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 集族 $\mathscr{U}_n = \{B(x, 1/n) : x \in X\}$ 是 X 的开覆盖, 于是 $\mathscr{U}_n$ 存在可数子覆盖 $\mathscr{V}_n = \{B(x_{n,k}, 1/n) : k \in \mathbb{Z}_+\}$. 令 $A = \{x_{n,k} : n, k \in \mathbb{Z}_+\}$, 则 A 是 X 的可数子集. 往证 $\overline{A} = X$.

对任意的 $x \in X$ 及 X 中任意包含 x 的开集 U, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$. 取 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $1/n < \varepsilon$. 由于 $\mathscr{V}_n$ 是 X 的开覆盖, 所以存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $x \in B(x_{n,k}, 1/n)$, 那么 $d(x_{n,k}, x) < 1/n < \varepsilon$, 所以 $x_{n,k} \in B(x, \varepsilon) \subset U$, 于是 $U \cap A \neq \varnothing$, 即 $x \in \overline{A}$. 从而 $\overline{A} = X$, 故 X 是可分空间.

(3) ⇒ (1). 设 (X, d) 是可分的度量空间, A 是 X 的可数的稠密子集. 令 $\mathscr{B} = \{B(x, 1/n) : x \in A,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$, 则 $\mathscr{B}$ 是 X 中的可数的开集族. 往证 $\mathscr{B}$ 是 X 的基.

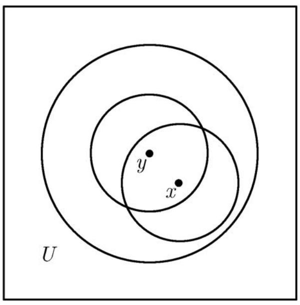


图 3.8.1

对 X 中任意开集 U 及 $y \in U$, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $B(y, 2/n) \subset U$. 因为 A 是 X 的稠密子集, 所以 $B(y, 1/n) \cap A \neq \varnothing$. 取定 $x \in B(y, 1/n) \cap A$, 则 $B(x, 1/n) \subset B(y, 2/n)$, 见图 3.8.1. 事实上, 对任意的 $z \in B(x, 1/n)$, 有

$$d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n},$$

因此 $z \in B(y, 2/n)$. 从而, $y \in B(x, 1/n) \subset B(y, 2/n) \subset U$. 根据定理 2.2.1, $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 故 X 是第二可数的. □

根据定理 3.8.3 和定理 3.7.2, 可得

推论 3.8.1　可分或 Lindelöf 的度量空间的每个子空间都具有可数基, 从而是可分且 Lindelöf 的.

根据推论 3.8.1、例 3.7.2 和例 3.7.3, 下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$、良序空间 $[0, \omega_1)$ 都不是可度量化空间.

我们稍稍拓广定义 3.5.1 中介绍的函数分离概念. 设 X 是拓扑空间. 如果 X

上的实值连续函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 满足: 对任意的 $x\in X$ 及 X 中不含 x 的任意一个闭集 A, 存在 $\alpha\in J$ 使得 $f_\alpha(x)\notin\overline{f_\alpha(A)}$, 则称 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ **分离 X 中的点与闭集**.

定义 3.8.3 设 X, Y 都是拓扑空间, 函数 $f:X\to Y$.

定义 $f':X\to f(X)$ 为 $f'(x)=f(x), \forall\, x\in X$. 如果 f' 是同胚, 则称 $f:X\to Y$ 是**拓扑嵌入**或**嵌入**, 或称 X **可同胚嵌入于** Y 中.

若 Z 是拓扑空间 X 的子空间, 则内射 $j:Z\to X$ 是拓扑嵌入.

引理 3.8.1 (嵌入引理) 设 X 是 T_1 空间. 如果 X 上的实值连续函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 分离 X 中的点与闭集, 则由

$$F(x)=(f_\alpha(x))_{\alpha\in J},\quad x\in X$$

所定义的函数 $F:X\to\mathbb{R}^J$ 是 X 到积空间 $\mathbb{R}^J$ 的拓扑嵌入.

证明 因为 F 是从拓扑空间 X 映入积空间 $\mathbb{R}^J$ 的函数且每个坐标函数 f_α 是连续的, 于是 F 是连续函数. 以下两点说明 F 是拓扑嵌入.

(1) F 是单射. 对 X 中不同的两点 x,y, 因为 X 是 T_1 空间, 所以 $\{x\}$ 与 $\{y\}$ 都是 X 中的闭集, 存在 $\alpha\in J$ 使得 $f_\alpha(x)\neq f_\alpha(y)$, 从而 $F(x)\neq F(y)$. 故 F 是单射.

(2) $F:X\to F(X)$ 是开映射. 设 U 是 X 中的开集. 对每个 $y\in F(U)$, 存在 $x\in U$ 使得 $F(x)=y$. 由于 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 分离 X 中的点与闭集, 存在 $\alpha\in J$ 使得 $f_\alpha(x)\notin\overline{f_\alpha(X-U)}$. 令 $V=\pi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}-\overline{f_\alpha(X-U)})$, 其中 $\pi_\alpha:\mathbb{R}^J\to\mathbb{R}$ 是到第 α 个坐标空间的投射, 则 $y\in V$ 且 V 是积空间 $\mathbb{R}^J$ 的开集. 往证 $V\cap F(X)\subset F(U)$. 若 $z\in X$ 且 $F(z)\in V$, 那么 $f_\alpha(z)\in\mathbb{R}-\overline{f_\alpha(X-U)}$, 于是 $z\in f_\alpha^{-1}(\mathbb{R}-\overline{f_\alpha(X-U)})\subset U$, 从而 $F(z)\in F(U)$. 因此, $F(U)$ 是 y 在 $F(X)$ 中的邻域. 故 $F(U)$ 是 $F(X)$ 的开集. □

定理 3.8.4 X 是完全正则空间当且仅当对某个指标集 J, X 可拓扑嵌入积空间 $[0,1]^J$.

证明 若 X 是完全正则空间, 记全体从 X 到闭区间 $[0,1]$ 的连续函数族为 $\mathscr{F}=\{f_\alpha:\alpha\in J\}$, 则 $\mathscr{F}$ 分离 X 中的点与闭集. 由引理 3.8.1 (嵌入引理) 及定理 2.4.4, 由 $F(x)=(f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$ 所定义的函数 $F:X\to\mathbb{R}^J$ 是 X 到积空间 $[0,1]^J$ 的拓扑嵌入.

反之, 设对某个指标集 J, 存在拓扑嵌入 $f:X\to[0,1]^J$. 与定理 3.5.2 类似的证明, 完全正则性是可积性 (见习题 3.8.1), 于是 $[0,1]^J$ 是完全正则空间. 因为完全正则性是遗传性 (见定理 3.5.2), 所以 $f(X)$ 是完全正则空间, 从而 X 也是完全正则空间. □

定理 3.8.5 (Urysohn 度量化定理, 1925) 具有可数基的正则空间是可度量化的.

证明　设 X 是具有可数基的正则空间. 根据推论 3.7.1, X 是正规的. 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基, 令 $\varphi = \{(U,\ V) : U,\ V \in \mathscr{B}$ 且 $\overline{U} \subset V\}$, 则 φ 是可数的. 记 $\varphi = \{(U_n, V_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 由于 $\overline{U}_n$ 与 $X - V_n$ 是正规空间 X 的不相交闭集, 根据 Urysohn 引理, 存在连续函数 $f_n : X \to [0,1]$ 使得 $f_n(\overline{U}_n) \subset \{0\}$, $f_n(X - V_n) \subset \{1\}$. 函数 $F : X \to [0,1]^\omega$ 定义为

$$F(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{Z}_+}, \quad x \in X,$$

并且赋予 $[0,1]^\omega$ 积拓扑. 为了证明 F 是拓扑嵌入, 由引理 3.8.1 (嵌入引理), 只需证明连续函数族 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 分离 X 中的点与闭集.

对每个 $x \in X$ 及 X 中不含点 x 的任意闭集 A, 因为 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 存在 $V \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in V \subset X - A$. 再由 X 的正则性, 存在 $U \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in U \subset \overline{U} \subset V$. 于是 $(U,\ V) \in \varphi$, 所以存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $(U,\ V) = (U_n,\ V_n)$, 从而 $f_n(x) = 0 \notin \{1\} \supset \overline{f_n(X - V_n)} \supset \overline{f_n(A)}$. 即 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 分离 X 中的点与闭集.

综上所述, $F : X \to F(X)$ 是同胚. 由定理 3.8.2, $[0,1]^\omega$ 是度量空间, 所以 X 是可度量化空间. □

Smirnov 删除序列拓扑空间 (例 2.2.4 (3), 例 3.4.2) 是具有可数基的 Hausdorff 空间, 但它不是正则空间, 所以 Urysohn 引理中的正则性不可减弱为 Hausdorff 分离性质. 不可数的离散度量空间不是第二可数空间, 因而 Urysohn 引理并不是度量化问题的满意的回答. 任意拓扑空间的度量化定理在第 4 章中介绍.

推论 3.8.2　设 X 是拓扑空间. 下列条件等价:

(1) X 是可分的可度量化空间;

(2) X 是具有可数基的正则空间;

(3) X 同胚于积空间 $[0,1]^\omega$ 的一个子集.

证明　由定理 3.8.3 和定理 3.4.6 得 (1) $\Rightarrow$ (2). 由定理 3.8.5 的证明得 (2) $\Rightarrow$ (3). 下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 由定理 3.8.2 和定理 3.7.3, 积空间 $[0,1]^\omega$ 是具有可数基的度量空间, 所以 $[0,1]^\omega$ 的每个子空间是可分的度量空间, 从而 X 是可分的可度量空间. □

习　题　3.8

3.8.1　证明: 完全正则性是可积性.

3.8.2　证明: $\mathbb{R}^J$ 在箱拓扑下是完全正则的.

3.8.3　函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ 定义为 $f(t) = (t, t, \cdots)$, $t \in \mathbb{R}$. 证明: 若 $\mathbb{R}^\omega$ 赋予箱拓扑, 则 f 不连续.

3.8.4　设 X 是紧的 Hausdorff 空间. 证明下列条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间;

(2) X 有可数基;

(3) X 同胚于积空间 $[0,1]^\omega$ 的一个闭子空间.

3.8.5 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是拓扑空间的族, 对每个 $\alpha\in J$, $A_\alpha\subset X_\alpha$. 证明: 无论对于 $X=\prod\limits_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的箱拓扑, 还是积拓扑, 都有

$$\overline{\prod_{\alpha\in J}A_\alpha}=\prod_{\alpha\in J}\overline{A}_\alpha.$$

3.8.6 设 $\{(X_n,d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是度量空间的列. 对积集 $X=\prod\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}X_n$ 的任意两点 $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $y=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, 定义

$$\rho(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{2^n}\cdot\overline{d}_n(x_n,y_n).$$

证明: ρ 是 X 上的度量, 且由 ρ 诱导的 X 上的度量拓扑就是由 d_n 诱导的 X_n $(n=1,2,\cdots)$ 上的度量拓扑的积拓扑.

第 4 章　紧空间与度量空间

在第 3 章中, 我们对于紧空间与度量空间的性质已有了基本的认识. 本章在进一步阐述它们性质的基础上, 引入仿紧空间, 介绍 Tychonoff 定理、Stone 定理和 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理. 由此说明, 紧性与可度量性是一般拓扑学中最典型的拓扑不变量.

4.1　紧性的推广

作为紧空间讨论的继续, 本节介绍与紧空间相关的几种紧性, 尤其是可数紧性, 并证明它们在度量空间中的等价性.

定义 4.1.1　设 X 是拓扑空间. 如果 X 的每个可数开覆盖都有有限的子覆盖, 则称 X 是*可数紧空间*.

显然, 紧空间是可数紧的, 其逆不成立 (见例 4.1.1). 易验证, Lindelöf 的可数紧空间是紧的.

在给出可数紧空间的刻画前, 引入集族有限交性质的概念.

定义 4.1.2　设 X 是一个集合, $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族. 如果 $\mathscr{A}$ 的任意有限子族的交是非空的, 则称 $\mathscr{A}$ 具有*有限交性质*.

设 $\{x_n\}$ 是拓扑空间 X 中的序列, 点 $x \in X$ 称为 $\{x_n\}$ 的*聚点*, 如果 x 的每个邻域都含有 $\{x_n\}$ 中的无限项.

定理 4.1.1　设 X 是拓扑空间. 下列条件相互等价:

(1) X 是可数紧空间;

(2) X 的每个具有有限交性质的可数闭集族有非空的交;

(3) X 的每个序列都有聚点.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 设 X 是可数紧空间, $\mathscr{F} = \{F_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集族. 如果 $\bigcap \mathscr{F} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n = \varnothing$, 则 $\{X - F_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 X 的可数的开覆盖, 于是它有有限的子覆盖, 记为 $\{X - F_{n_i} : i \leqslant m\}$. 因而, $\bigcap\limits_{i\leqslant m} F_{n_i} = \varnothing$. 这与 $\mathscr{F}$ 具有有限交性质矛盾. 故 $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列. 令 $F_n = \{x_k : k \geqslant n\}, n \in \mathbb{Z}_+$, 则 $\{\overline{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集族. 由假设, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{F}_n \neq \varnothing$, 取 $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{F}_n$, 则 x 是

序列 $\{x_n\}$ 的聚点.

(3) ⇒ (1). 设 $\mathscr{U}=\{U_n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ 是 X 的开覆盖. 如果 $\mathscr{U}$ 没有有限的子覆盖, 则对任意的 $n\in\mathbb{Z}_+$, 有 $X-\bigcup\limits_{i\leqslant n}U_i\neq\varnothing$. 取 $x_n\in X-\bigcup\limits_{i\leqslant n}U_i$, $n\in\mathbb{Z}_+$. 由假设, 序列 $\{x_n\}$ 有聚点 x. 由于 $\mathscr{U}$ 是 X 的覆盖, 存在 $n_0\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $x\in U_{n_0}$. 因为 x 是序列 $\{x_n\}$ 的聚点, 存在 $n>n_0$, 使得 $x_n\in U_{n_0}$, 这与 $x_n\in X-\bigcup\limits_{i\leqslant n}U_i$ 矛盾. 故 X 是可数紧空间. □

推论 4.1.1　设 X 是非空的可数紧的 Hausdorff 空间. 如果 X 中没有孤立点, 则 X 是不可数集.

证明　(1) 若 U 是 X 的非空开集且 $x\in X$, 则存在非空开集 $V\subset U$ 使得 $x\notin\overline{V}$.

由定理 3.4.2, U 是无限集, 所以可取定 $y\in U-\{x\}$. 由于 X 是 Hausdorff 空间, X 中存在不相交的开集 U_1 和 V_1 分别包含点 x, y. 令 $V=U\cap V_1$, 则 $y\in V\subset U$ 且 $x\notin\overline{V}$.

(2) 任意函数 $f:\mathbb{Z}_+\to X$ 都不是满射.

设函数 $f:\mathbb{Z}_+\to X$. 令 $x_n=f(n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$. 对非空开集 $U=X$, 由 (1), 选取非空开集 $V_1\subset U$, 使得 $x_1\notin\overline{V}_1$. 一般地, 对已取定的非空开集 V_{n-1}, 选取非空开集 $V_n\subset V_{n-1}$ 使得 $x_n\notin\overline{V}_n$. 因此, 闭集列 $\{\overline{V}_n\}$ 具有有限交性质. 由定理 4.1.1, 存在 $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\overline{V}_n$. 对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$, 有 $x\in\overline{V}_n$, 而 $x_n\notin\overline{V}_n$, 所以 $x\neq x_n$. 这表明函数 f 不是满的.

由习题 1.1.4 的 (3), X 是不可数的. □

下面讨论定理 4.1.1 中 (3) 的几种变形.

定义 4.1.3　设 X 是拓扑空间. 如果 X 中的每个序列都有收敛的子序列, 则称 X 是*序列紧空间*. 如果 X 中的每个无限子集都有聚点, 则称 X 是*列紧空间*.

根据定理 4.1.1 中的 (3) 与 (1) 的等价性, 可得

推论 4.1.2　序列紧空间是可数紧的.

从定理 4.1.1 与引理 3.1.1 的 (2), 可得

推论 4.1.3　第一可数的可数紧空间是序列紧的.

例 4.1.1　良序空间 $[0,\omega_1)$ 是非紧的序列紧空间.

由例 3.7.3, $[0,\omega_1)$ 不是紧空间. 设 $\{x_n\}$ 是 $[0,\omega_1)$ 中的序列, 由推论 1.2.1, 存在 $\beta<\omega_1$, 使得所有的 $x_n<\beta$. 因为 $[0,\beta]$ 是第一可数的紧空间, 由推论 4.1.3, 序列 $\{x_n\}$ 存在收敛的子序列. 所以 $[0,\omega_1)$ 是序列紧空间.

例 4.1.2　实数集 $\mathbb{R}$ 赋予右手拓扑 τ 的空间 (见习题 2.2.1) 是列紧空间, 不是可数紧空间.

设 A 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 取定 $a \in A$, 则 $a-1 \in A^d$, 所以 $(\mathbb{R}, \tau)$ 是列紧空间. 由于 $(\mathbb{R}, \tau)$ 的开覆盖 $\{(-n, +\infty)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 没有有限的子覆盖, 所以它不是可数紧空间.

定理 4.1.2 可数紧空间是列紧的; T_1 的列紧空间是可数紧的.

证明 设拓扑空间 X 是可数紧空间. 若 A 是 X 的无限子集, 则 A 中含有可数无限子集 $\{x_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. 由定理 4.1.1, 序列 $\{x_n\}$ 有聚点, 则这聚点也是 A 的聚点.

另一方面, 设 X 是 T_1 的列紧空间. 我们证明 X 满足定理 4.1.1 的 (3). 若 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列, 让 $A = \{x_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. 如果 A 是有限集, 则 $\{x_n\}$ 中有一子列是常值序列, 于是 $\{x_n\}$ 有聚点. 如果 A 是无限集, 则 A 有聚点. 由定理 3.4.2, 这聚点是序列 $\{x_n\}$ 的聚点. 故 X 是可数紧空间. □

为了给出度量空间中各类紧性的等价性, 引入 Lebesgue 数的概念. 设 $\mathscr{A}$ 是度量空间 (X, d) 的覆盖, 正数 δ 称为 $\mathscr{A}$ 的 Lebesgue 数, 如果 X 的每个直径小于 δ 的子集必被包含在 $\mathscr{A}$ 的某个元素之中. 并非度量空间的每个开覆盖都具有 Lebesgue 数. 例如, 让 $K = \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是欧氏空间 $(\mathbb{R}, d)$ 的度量子空间, 那么 K 的开覆盖 $\{\{1/n\} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 不存在 Lebesgue 数.

定理 4.1.3 设 X 是可度量化空间. 下列各条等价:

(1) X 是紧空间;

(2) X 是序列紧空间;

(3) X 是可数紧空间;

(4) X 是列紧空间.

证明 因为可度量化空间是 T_1 的第一可数空间, 所以由推论 4.1.2、推论 4.1.3 及定理 4.1.2, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4). 为完成定理的证明, 只需证明序列紧的度量空间 (X, d) 是紧空间, 分如下三步进行.

(i) X 的每个开覆盖具有 Lebesgue 数.

若不然, 则存在度量空间 (X, d) 的开覆盖 $\mathscr{A}$ 不具有 Lebesgue 数, 即对任意的 $\delta > 0$, 存在 $C \subset X$, 使得 $\mathrm{diam} C < \delta$ 且 C 不含于 $\mathscr{A}$ 的任何元中. 取 $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $C_n \subset X$, 满足 $\mathrm{diam} C_n < 1/n$, 且 $\mathscr{A}$ 的任意元素都不包含 C_n. 取 $x_n \in C_n$. 由 X 的序列紧性, $\{x_n\}$ 有收敛的子序列 $\{x_{n_i}\}$. 设 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 $x \in X$, 则存在 $A_0 \in \mathscr{A}$ 使得 $x \in A_0$. 由于 A_0 是开集, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x, 2\varepsilon) \subset A_0$. 取定 $i \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $d(x_{n_i}, x) < \varepsilon$ 且 $1/n_i < \varepsilon$. 由于 $\mathrm{diam} C_{n_i} < 1/n_i$, 有 $C_{n_i} \subset B(x_{n_i}, 1/n_i) \subset B(x, 2\varepsilon) \subset A_0$, 这与集合 C_{n_i} 的选取矛盾.

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$, X 的由全体 ε 球形邻域组成的开覆盖有有限子覆盖.

否则, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得集族 $\{B(x, \varepsilon_0) : x \in X\}$ 没有有限子族覆盖 X. 取 $x_1 \in X$, 则存在 $x_2 \in X - B(x_1, \varepsilon_0)$. 假设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 已取定. 因为 $\{B(x_i, \varepsilon_0)\}_{i \leqslant n}$

不能覆盖 X, 所以存在 $x_{n+1} \in X - \bigcup_{i \leqslant n} B(x_i, \varepsilon_0)$. 这样就得到 X 中的序列 $\{x_n\}$, 满足当 $m, n \in \mathbb{Z}_+$ 且 $m \neq n$ 时, 有 $d(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon_0$. 从而, 对任意 $x \in X$, $B(x, \varepsilon_0/2)$ 中至多含有 $\{x_n\}$ 中的一项. 因此, $\{x_n\}$ 没有收敛的子序列. 这与 X 的序列紧性矛盾.

(iii) X 是紧空间.

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的任一开覆盖. 由 (i), $\mathscr{A}$ 有 Lebesgue 数 δ. 由 (ii), X 的由全体 $\delta/3$ 球形邻域组成的开覆盖有有限子覆盖, 设其为 $\{B(x_i, \delta/3)\}_{i \leqslant m}$. 对每个 $i \leqslant m$, 由于 $\text{diam} B(x_i, \delta/3) < \delta$, 所以存在 $A_i \in \mathscr{A}$ 使得 $B(x_i, \delta/3) \subset A_i$. 因此, $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\{A_i\}_{i \leqslant m}$ 覆盖 X. 故 X 是紧空间. □

由定理 4.1.3 证明中 (i) 的结论, 得

推论 4.1.4 (Lebesgue 数引理, 1921) 紧度量空间的每个开覆盖都具有 Lebesgue 数.

习 题 4.1

4.1.1 证明: 单位闭区间 $[0,1]$ 作为 $\mathbb{R}_l$ 的子空间不是列紧的.

4.1.2 连续映射是否保持可数紧性? 序列紧性? 列紧性?

4.1.3 设 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 是可数紧空间 X 的递减的非空闭集列. 证明: 若 $f : X \to Y$ 是连续映射, 且 Y 是 T_1 空间, 则 $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} f(F_n) = f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} F_n\right)$.

4.1.4 点 x 称为拓扑空间 X 的子集 A 的 ω 聚点, 如果 x 的任何邻域包含集 A 的无限个点. 证明: 拓扑空间 X 是可数紧的当且仅当 X 的每个无限集有 ω 聚点.

4.1.5 设 X 是可数紧空间. 证明: 若函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 连续, 则 f 是有界函数.

4.1.6 设紧的 Hausdorff 空间 X 是两个闭子空间 X_1 和 X_2 的并. 如果 X_1 和 X_2 都是可度量化的, 证明 X 也是可度量化的. 你对上述结果可作何种方式的推广?

4.1.7 设函数 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 当 $d_X(x_1, x_2) < \delta$ 时, 有 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, 称函数 f 在 X 上一致连续.

利用 Lebesgue 数引理, 证明一致连续性定理: 设函数 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 连续. 如果 X 是紧空间, 则 f 在 X 上一致连续.

4.2 Tychonoff 积定理

可度量性是可数可积性, 但不是任意可积性. 定理 3.6.8 表明紧性是有限可积性. 本节要介绍的 Tychonoff 定理显示了紧性是任意可积性. 这一良好性质的证明要用到集合论中的选择公理. 为此, 先证明一些引理.

回忆集族的有限交性质. 用它可给出空间紧性的闭集形式的刻画.

引理 4.2.1 拓扑空间 X 是紧的当且仅当 X 中的每个具有有限交性质的闭集族都有非空的交.

证明 必要性的证明同定理 4.1.1 的 (1) ⇒ (2). 下面证明充分性. 让 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖, 则 $\mathscr{F}=\{X-A: A\in\mathscr{A}\}$ 是 X 的闭集族且

$$\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F=\bigcap_{A\in\mathscr{A}}(X-A)=X-\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A=\varnothing.$$

根据假设, $\mathscr{F}$ 没有有限交性质. 因此, 存在 $\mathscr{F}$ 的有限子族 $\{X-A_i\}_{i\leqslant m}$, 使得 $\bigcap\limits_{i\leqslant m}(X-A_i)=X-\bigcup\limits_{i\leqslant m}A_i=\varnothing$. 于是, $\bigcup\limits_{i\leqslant m}A_i=X$. 从而, $\{A_i\}_{i\leqslant m}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖. 故 X 是紧空间. □

推论 4.2.1 拓扑空间 X 是紧的当且仅当对 X 中每个具有有限交性质的集族 $\mathscr{A}$, 有 $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}\overline{A}\neq\varnothing$.

设 X 是一个集合. 如果 $\mathscr{B}$ 是 X 的具有有限交性质的子集族, 且 X 的每个以 $\mathscr{B}$ 为真子族的子集族都不再具有有限交性质, 则称子集族 $\mathscr{B}$ 关于有限交性质是极大的.

引理 4.2.2 设 X 是一个集合. 如果 $\mathscr{A}$ 是 X 的具有有限交性质的子集族, 则存在 X 的一个子集族 $\mathscr{B}$, 使得 $\mathscr{B}$ 包含 $\mathscr{A}$ 且 $\mathscr{B}$ 关于有限交性质是极大的.

证明 令

$$\mathbb{A}=\{\mathscr{D}:\mathscr{D}\text{ 是 }X\text{ 的具有有限交性质的子集族且 }\mathscr{A}\subset\mathscr{D}\},$$

则 $\mathbb{A}$ 关于集族之间的包含关系是偏序关系. 要证 $\mathbb{A}$ 有极大元 $\mathscr{B}$. 为此只需证明: 如果 $\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{A}$ 的全序子集, 则 $\mathbb{B}$ 在 $\mathbb{A}$ 中有上界. 应用 Zorn 引理 (见定理 1.3.3) 便可得 $\mathbb{A}$ 的极大元.

令 $\mathscr{C}=\bigcup\limits_{\mathscr{D}\in\mathbb{B}}\mathscr{D}$, 则对每个 $\mathscr{D}\in\mathbb{B}$, 有 $\mathscr{A}\subset\mathscr{D}\subset\mathscr{C}$. 往证 $\mathscr{C}$ 具有有限交性质. 设 $\{C_i: i\leqslant n\}\subset\mathscr{C}$. 对每个 $i\leqslant n$, 存在 $\mathscr{D}_i\in\mathbb{B}$ 使得 $C_i\in\mathscr{D}_i$. 由于 $\mathbb{B}$ 是全序的, 所以 $\{\mathscr{D}_i: i\leqslant n\}$ 在 $\mathbb{B}$ 中有最大元, 记为 $\mathscr{D}'$, 从而每个 $\mathscr{D}_i\subset\mathscr{D}'$, 于是 $C_i\in\mathscr{D}'$. 因为 $\mathscr{D}'$ 具有有限交性质, 所以 $\bigcap\limits_{i\leqslant n}C_i\neq\varnothing$. 故 $\mathscr{C}$ 具有有限交性质. □

引理 4.2.3 如果 $\mathscr{D}$ 是集合 X 的关于有限交性质是极大的集族, 那么

(1) $\mathscr{D}$ 中元素的任意有限交仍属于 $\mathscr{D}$;

(2) 如果 X 的子集 A 与 $\mathscr{D}$ 中任一元相交, 则 $A\in\mathscr{D}$.

证明 (1) 设 $B=\bigcap\limits_{i\leqslant n}D_i$, 其中每个 $D_i\in\mathscr{D}$. 令 $\mathscr{D}'=\mathscr{D}\cup\{B\}$, 则 $\mathscr{D}'$ 具有有限交性质. 事实上, 任取 $\mathscr{D}'$ 中的有限个元素 D_i', $i\leqslant m$. 由于 $\mathscr{D}$ 具有有限交性质,

不妨设 $D'_m = B$, 则 $B \cap \left(\bigcap_{i \leqslant m-1} D'_i \right) \neq \varnothing$. 由 $\mathscr{D}$ 的极大性, $B \in \mathscr{D}$.

(2) 令 $\mathscr{D}' = \mathscr{D} \cup \{A\}$, 则 $\mathscr{D}'$ 具有有限交性质. 事实上, 对任意的 $D_i \in \mathscr{D}'$, $i \leqslant m$, 由于 $\mathscr{D}$ 具有有限交性质, 不妨设 $D_m = A$. 根据 (1), $\bigcap_{i \leqslant m-1} D_i \in \mathscr{D}$, 于是 $A \cap \left(\bigcap_{i \leqslant m-1} D_i \right) \neq \varnothing$. 由 $\mathscr{D}$ 的极大性, $A \in \mathscr{D}$. □

定理 4.2.1 (Tychonoff 定理, 1935) 紧性是可积性.

证明 设 $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ 是紧空间的集族. 记积空间 $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的具有有限交性质的子集族. 往证 $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} \overline{A} \neq \varnothing$. 从而由推论 4.2.1, X 是紧的.

根据引理 4.2.2, 存在 X 关于有限交性质是极大的子集族 $\mathscr{D}$, 使得 $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$.

给定 $\alpha \in J$, 令 $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ 是投射. 因为 $\mathscr{D}$ 具有有限交性质, 所以 X_α 的子集族 $\{\pi_\alpha(D) : D \in \mathscr{D}\}$ 具有有限交性质. 由 X_α 的紧性与推论 4.2.1, $\cap\{\overline{\pi_\alpha(D)} : D \in \mathscr{D}\} \neq \varnothing$, 取定 $x_\alpha \in \cap\{\overline{\pi_\alpha(D)} : D \in \mathscr{D}\}$. 对 x_α 在 X_α 中的任意邻域 U_α 及每个 $D \in \mathscr{D}$, $U_\alpha \cap \pi_\alpha(D) \neq \varnothing$, 因而 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap D \neq \varnothing$, 根据引理 4.2.3 的 (2), $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathscr{D}$. 令 $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J} \in X$. 由引理 4.2.3 的 (1), 对任意有限集 $J_0 \subset J$, $\bigcap_{\alpha \in J_0} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathscr{D}$. 由积拓扑的定义,

$$\left\{ \bigcap_{\alpha \in J_0} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : J_0 \text{ 是 } J \text{ 的有限子集}, U_\alpha \text{ 是 } x_\alpha \text{ 在 } X_\alpha \text{ 中的开邻域}, \alpha \in J \right\}$$

构成点 $x \in X$ 的邻域基. 从而 x 的任意邻域与 $\mathscr{D}$ 中的每个元素都相交, 即对每个 $D \in \mathscr{D}$, 有 $x \in \overline{D}$. 因此, $\bigcap_{D \in \mathscr{D}} \overline{D} \neq \varnothing$. 故 $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} \overline{A} \neq \varnothing$. □

习 题 4.2

4.2.1 设 $\mathscr{D}$ 是拓扑空间 X 的关于有限交性质的极大子集族. 证明:

(1) 对每个 $D \in \mathscr{D}$, $x \in \overline{D}$ 当且仅当 x 的每个邻域属于 $\mathscr{D}$;

(2) 若 $D \in \mathscr{D}$, 且 $D \subset A$, 那么 $A \in \mathscr{D}$;

(3) 若 X 满足 T_1 分离公理, 则 $\bigcap_{D \in \mathscr{D}} \overline{D}$ 至多是单点集.

4.2.2 如果集合 X 的子集族 $\mathscr{A}$ 的任意可数子族的交是非空的, 则称 $\mathscr{A}$ 具有**可数交性质**. 证明: X 是 Lindelöf 空间当且仅当 X 的每个具有可数交性质的闭集族都有非空的交.

4.2.3 设 $J = [0, 1]$ 是单位闭区间. 对每个 $\alpha \in J$, 记 $D_\alpha = \{0, 1\}$, 赋予离散拓扑, 作积空间 $X = \prod_{\alpha \in J} D_\alpha$. 证明: X 不是序列紧空间.

4.2.4 试问: $[0, 1]^\omega$ 在箱拓扑下是否是紧空间?

4.3 紧　　化

紧化探讨如何把拓扑空间同胚嵌入一个紧空间的问题, 即把拓扑空间扩张为某个紧空间的子空间. 本节介绍两种特殊的紧空间扩张: 单点紧化与 Stone-Čech 紧化.

定义 4.3.1 设 X 是拓扑空间. 如果存在紧的 Hausdorff 空间 Y, 使得 X 是 Y 的稠密的子空间, 则称 Y 是 X 的紧化.

设拓扑空间 Y_1, Y_2 都是 X 的紧化. 如果存在同胚 $h: Y_1 \to Y_2$, 使得 $h|_X = i_X$, 则称 X 的两个紧化 Y_1 与 Y_2 等价.

引理 4.3.1 设 X 是拓扑空间, Z 是紧的 Hausdorff 空间. 如果 $h: X \to Z$ 是拓扑嵌入, 则存在 X 的紧化 Y 具有性质: 存在拓扑嵌入 $H: Y \to Z$, 使得 $H|_X = h$.

在紧化等价的意义下, 紧化 Y 是唯一确定的, 称为由拓扑嵌入 h 诱导的紧化.

证明 设 $h: X \to Z$ 是拓扑嵌入. 令 $X_0 = h(X)$, $Y_0 = \overline{h(X)}$, 则 Y_0 是紧的 Hausdorff 空间且 $\overline{X}_0 = Y_0$. 因此, Y_0 是 X_0 的紧化.

以下构造满足定理条件的空间 Y.

选取集合 A, 使得 $A \cap X = \varnothing$ 且 A 与 $Y_0 - X_0$ 之间有双射 $k: A \to Y_0 - X_0$. 令 $Y = X \cup A$, 定义函数 $H: Y \to Y_0$ 满足: 当 $x \in X$ 时, $H(x) = h(x)$; 当 $a \in A$ 时, $H(a) = k(a)$. 则 H 是双射. Y 赋予下述拓扑: U 是 Y 中的开集当且仅当 $H(U)$ 是 Y_0 中的开集. 易知, 函数 H 是同胚. 因为 $H|_X = h$, 所以 X 是 Y 的子空间且 $\overline{X} = Y$. 因而 Y 是 X 的紧化, $H: Y \to Z$ 是拓扑嵌入, 见图 4.3.1.

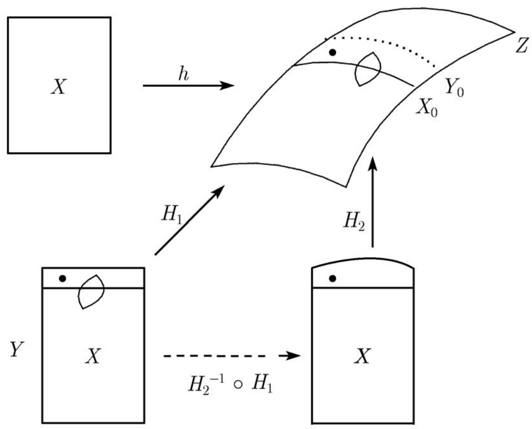


图 4.3.1

对 $i = 1, 2$, 设 Y_i 是 X 的紧化, 且拓扑嵌入 $H_i: Y_i \to Z$ 满足 $H_i|_X = h$, 则 $H_i(X) = h(X) = X_0$. 因为 H_i 连续, 所以 $H_i(Y_i) = H_i(\overline{X}) \subset \overline{H_i(X)} = \overline{X}_0$

(见定理 2.3.5); 又因为 $X_0 = H_i(X) \subset H_i(Y_i)$ 且 $H_i(Y_i)$ 是闭的 (见定理 3.6.7), 所以 $\overline{X}_0 \subset H_i(Y_i)$. 因此, $H_i(Y_i) = \overline{X}_0$. 于是 $H_2^{-1} \circ H_1 : Y_1 \to Y_2$ 是同胚且 $(H_2^{-1} \circ H_1)|_X = i_X$. 故 Y_1 与 Y_2 是等价的. □

一个拓扑空间 X 可以有多种不同的紧化. 下面的例子给出了一个开区间的 3 种紧化.

例 4.3.1 开区间 $X = (0,1)$ 的紧化.

(1) 单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 具有 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑是紧的 Hausdorff 空间. 函数 $h : X \to \mathbb{S}^1$ 定义为 $h(t) = (\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t)$, $t \in (0,1)$, 则 h 是拓扑嵌入, 由 h 诱导的 X 的紧化 Y 是由 $(0,1)$ 加上一点的紧化.

(2) 闭区间 $Y = [0,1]$ 具有 $\mathbb{R}$ 的子空间拓扑是 X 的紧化. 它是由内射 $j_X : X \to Y$ 诱导的 X 的紧化, 即由区间 $(0,1)$ 加上两个端点得到的.

(3) $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ 具有 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑. 映射 $h : X \to I^2$ 定义为 $h(x) = (x,\ \sin(1/x))$, $x \in (0,1)$, 空间 $Y_0 = \overline{h(X)}$ 是一条拓扑学家的正弦曲线 (见例 3.3.1). 由拓扑嵌入 h 诱导的 $(0,1)$ 的紧化与前两个是完全不同的. 这紧化是由 $(0,1)$ 的右端加上一个点, 左端加上一条线段得到的.

显然, 上述 3 种紧化均不等价.

定理 4.3.1 拓扑空间 X 有紧化当且仅当 X 是完全正则空间.

证明 设 X 有紧化 Y, 则 X 是紧的 Hausdorff 空间 Y 的稠密子空间. 由定理 3.6.4, Y 是正规的, 因而 Y 是完全正则的. 再由定理 3.5.2, X 也是完全正则空间.

反之, 设 X 是完全正则空间, 根据定理 3.8.4, 存在指标集 J 使得 X 能被拓扑嵌入到紧的 Hausdorff 空间 $[0,1]^J$ 中. 再根据引理 4.3.1, X 存在紧化. □

由定理 4.3.1, 在讨论拓扑空间的紧化时, 总是假设该空间是完全正则的. 对于完全正则空间 X, 如何构造 X 的紧化? 为此, 引入局部紧性质.

定义 4.3.2 设 X 是拓扑空间. 如果 X 的每一点都有紧的邻域, 则称 X 是*局部紧空间*.

显然, 紧空间是局部紧的, 离散空间也是局部紧的. 但是, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 作为实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间不是局部紧的.

例 4.3.2 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 积空间 $\mathbb{R}^n$ 是局部紧的. 但积空间 $\mathbb{R}^\omega$ 不是局部紧的.

对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 有形如 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ 的基元素含有点 x, 而 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 是 x 的紧邻域, 所以 $\mathbb{R}^n$ 是局部紧的.

若 $\mathbb{R}^\omega$ 中的点 x 具有紧的邻域 C, 则存在 $\mathbb{R}^\omega$ 的基本开集

$$B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

使得 $x \in B \subset C$. 对投射 $\pi_{n+1}: \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$, 有 $\mathbb{R} = \pi_{n+1}(B) \subset \pi_{n+1}(C) \subset \mathbb{R}$, 由定理 3.6.5, $\mathbb{R}$ 是紧的, 矛盾.

由定理 3.6.5, 连续函数保持紧性. 但连续函数未必保持局部紧性. 事实上, 离散空间是局部紧的, 而离散空间到任意空间上的函数是连续的.

定理 4.3.2 设 $f: X \to Y$ 是连续、满的开映射. 如果 X 是局部紧空间, 则 Y 也是局部紧空间.

证明 对任意 $y \in Y$, 取 $x \in f^{-1}(y)$. 由 X 的局部紧性, 存在 x 的紧邻域 C. 由于 f 是连续且开的, 根据定理 3.6.5, $f(C)$ 是 y 的紧邻域. □

对 Hausdorff 空间给出局部紧性的如下刻画, 更自然地体现了对"局部"的要求.

定理 4.3.3 局部紧的 Hausdorff 空间是完全正则空间.

证明 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间. 对 $x_0 \in X$, 若 F 是 X 中不包含 x_0 的闭集, 由 X 的局部紧性, 存在 x_0 的紧邻域 C. 令 $V = (X - F) \cap C^\circ$, 则 V 是 X 中包含 x_0 的开集. 因为 X 是 Hausdorff 空间, 紧集 C 是 X 中的闭集, 于是 $\overline{V} \subset C$, 所以 $\overline{V}$ 也是紧集. 由于 Hausdorff 的紧空间是正规的 (见定理 3.6.4), 所以 $\overline{V}$ 是正规的, 从而是完全正则的. 对 $x_0 \in \overline{V}$ 及不含 x_0 的闭集 $\overline{V} - V$, 存在连续函数 $h: \overline{V} \to [0,1]$, 使得 $h(x_0) = 0$ 且当 $x \in \overline{V} - V$ 时, $h(x) = 1$. 函数 $f: X \to [0,1]$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x \in \overline{V}, \\ 1, & x \in X - V. \end{cases}$$

这函数是确切定义的, 因为 f 在 $\overline{V} \cap (X - V) = \overline{V} - V$ 上均取值 1. 由定理 2.4.4 的 (5) (粘接引理), f 是连续的. 由于 $F \subset X - V$, 所以 $f(x_0) = 0$ 且当 $x \in F$ 时, $f(x) = 1$. □

定理 4.3.4 (Alexandroff 紧化定理, 1924) 拓扑空间 X 是局部紧的 Hausdorff 空间当且仅当存在紧的 Hausdorff 空间 Y, 满足下列条件:

(1) X 是 Y 的开子空间;

(2) $Y - X$ 是单点集.

证明 必要性. 设 (X, τ_0) 是局部紧的 Hausdorff 空间. Y 构造如下.

取一个不属于 X 的元素, 记为 ∞. 令 $Y = X \cup \{\infty\}$, Y 的子集族 τ 满足: (i) $\tau_0 \subset \tau$; (ii) $Y - C \in \tau$, 其中 C 为 X 中的紧子集. 则 τ 是 Y 上的拓扑 (见习题 3.6.2).

显然, $Y - X$ 是单点集且 X 是 Y 的开子集. 因为 X 是 Hausdorff 空间, 所以 X 的每个紧子集 C 是闭集, 于是 $(Y - C) \cap X = X - C \in \tau_0$. 因而, $\tau_0 = \tau|_X$. 故 X 是 Y 的开子空间.

最后, 证明 Y 是紧的 Hausdorff 空间.

Y 是 Hausdorff 空间. 设 $x, y \in Y$ 且 $x \neq y$. 如果 $x, y \in X$, 则存在 X 中不相交的开集分别包含 x 和 y. 如果 x, y 之一属于 X, 不妨设 $x \in X$, $y = \infty$. 让 U 是 x 在 X 中的紧邻域, 由定理 4.3.3, X 是正则空间, 则存在 X 的开集 V 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, 那么 $\overline{V}$ 是紧的, 从而 V 和 $Y - \overline{V}$ 是 Y 中分别包含 x 和 y 的不相交开集.

Y 是紧空间. 设 $\mathscr{A}$ 是 Y 的任意一个开覆盖, 存在 $A_0 \in \mathscr{A}$, 使得 $\infty \in A_0$. 对 Y 中的开集 A_0, 存在 X 中的紧子集 C 使得 $A_0 = Y - C$. 因为 $\mathscr{A}$ 覆盖紧子集 C, 由引理 3.6.1, 存在 $\mathscr{A}$ 的某一有限子族 $\mathscr{A}'$ 覆盖 C, 所以 $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\mathscr{A}' \cup \{A_0\}$ 覆盖 Y.

充分性. 设存在紧的 Hausdorff 空间 Y, 满足定理的条件 (1) 与 (2). 由定理 3.6.4, Y 是正规空间. 根据定理 3.4.8, X 是 Hausdorff 空间. 往证 X 是局部紧的.

对任意的 $x \in X$, Y 中存在分别包含 x 与单点集 $Y - X$ 的不相交开集 U 和 V. 令 $C = Y - V$, 则 C 是 Y 中的闭集, 从而也是 Y 中的紧集. 因为 $C \subset X$, 所以 C 又是 X 中的紧集且 $x \in U \subset C$. 因此, C 是 x 的紧邻域. □

在定理 4.3.4 中, 当 X 是非紧的局部紧 Hausdorff 空间时, 有 $\overline{X} = Y$, 所以 Y 是 X 的紧化, Y 称为 X 的*单点紧化*, Alexandroff *单点紧化*, 或 Alexandroff *紧化*.

推论 4.3.1 拓扑空间 X 是局部紧的 Hausdorff 空间当且仅当 X 同胚于一个紧 Hausdorff 空间的开子集.

证明 由定理 4.3.4 得必要性. 为了证明充分性, 只需证明局部紧 Hausdorff 空间的开子空间是局部紧的. 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, Y 是 X 的开子空间. 对每个 $y \in Y$, 存在 y 在 X 中的紧邻域 C, 那么 $C \cap Y$ 是 y 在 X 中的邻域. 由定理 4.3.3, 存在 X 的开集 V 使得 $y \in V \subset \mathrm{cl}_X V \subset C \cap Y$, 于是 $\mathrm{cl}_X V$ 是 y 在 Y 中的紧邻域. 因此, Y 是局部紧的. □

对拓扑空间 X 及其紧化 Y, 一个基本的问题是: 寻求定义在 X 上的连续实值函数可以扩张到它的紧化 Y 上的条件. 首先给出有关扩张的一个引理.

引理 4.3.2 设 X 是拓扑空间, Z 是 Hausdorff 空间, $A \subset X$. 如果函数 $f: A \to Z$ 是连续的, 则至多存在 f 的一个连续扩张 $g: \overline{A} \to Z$.

证明 假设函数 $g_1, g_2 : \overline{A} \to Z$ 是 f 的两个不同的连续扩张. 存在 $x \in \overline{A}$, 使得 $g_1(x) \neq g_2(x)$, 于是存在 Z 中不相交的开集 U_1, U_2 分别包含 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$. 因为 g_1, g_2 都是连续的, 存在 x 在 $\overline{A}$ 中的邻域 V 使得 $V \subset g_1^{-1}(U_1) \cap g_2^{-1}(U_2)$. 这时, $V \cap A \neq \varnothing$, 取 $y \in V \cap A$, 则

$$f(y) = g_1(y) \in g_1(V) \subset U_1 \text{ 与 } f(y) = g_2(y) \in g_2(V) \subset U_2.$$

这与 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ 矛盾. □

定理 4.3.5 (Stone-Čech 紧化定理, 1937) 如果 X 是完全正则空间, 则存在 X 的紧化 Y 满足条件: 从 X 到任一紧 Hausdorff 空间的每个连续函数可以唯一地连续扩张到 Y 上.

证明 先证明存在 X 的紧化 Y 满足条件: X 上的每个实值有界连续函数都可以连续扩张到 Y 上.

设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 X 上所有实值有界连续函数组成的族. 对每个 $\alpha \in J$, 令

$$a_\alpha = \inf\{f_\alpha(x) : x \in X\}, \quad b_\alpha = \sup\{f_\alpha(x) : x \in X\} \text{ 且 } I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha],$$

则 $f_\alpha(X) \subset I_\alpha$. 记积空间 $Z = \prod_{\alpha\in J} I_\alpha$, 并定义映射 $h : X \to Z$ 为

$$h(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in J}, \quad x \in X.$$

根据 Tychonoff 定理 (见定理 4.2.1), Z 是紧的 Hausdorff 空间. 由于 X 的完全正则性, 函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 分离 X 中的点与闭集. 根据引理 3.8.1 (嵌入引理), h 是拓扑嵌入. 由引理 4.3.1, 存在 X 的紧化 Y 和拓扑嵌入 $H : Y \to Z$ 使得 $H|_X = h$.

设 f 是 X 上的实值有界连续函数, 则存在 $\beta \in J$ 使得 $f = f_\beta$. 令 $g = \pi_\beta \circ H : Y \to I_\beta$, 其中 $\pi_\beta : Z \to I_\beta$ 是投射, 那么 g 连续且对任意的 $x \in X$, 有 $g(x) = \pi_\beta(h(x)) = f_\beta(x)$, 即 $g|_X = f$. 因此, g 是 f 的连续扩张.

现在, 证明上述空间 Y 满足定理的要求. 设 C 是紧的 Hausdorff 空间且函数 $f : X \to C$ 连续. 因为 C 是完全正则空间, 根据定理 3.8.4, 存在指标集 K 使得 C 可以拓扑嵌入到 $[0,1]^K$. 不妨设 $C \subset [0,1]^K$. 对每个 $\alpha \in K$, 定义函数 $f_\alpha : X \to [0,1]$ 为 $f_\alpha(x) = \pi_\alpha(f(x))$, $x \in X$, 则 f_α 连续. 由前一段所证, f_α 有连续扩张 $g_\alpha : Y \to \mathbb{R}$. 定义函数 $g : Y \to \mathbb{R}^K$ 为

$$g(y) = (g_\alpha(y))_{\alpha\in K}, \quad y \in Y,$$

则 g 连续且当 $x \in X$ 时, $g(x) = (g_\alpha(x))_{\alpha\in K} = (f_\alpha(x))_{\alpha\in K} = f(x)$, 见图 4.3.2. 又由于

$$g(Y) = g(\overline{X}) \subset \overline{g(X)} = \overline{f(X)} \subset \overline{C} = C,$$

因此, g 是 f 的连续扩张. 由引理 4.3.2 可得连续扩张的唯一性. □

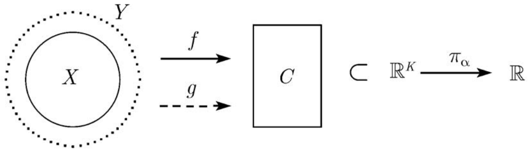


图 4.3.2

对于完全正则空间 X, 满足定理 4.3.5 的紧化 Y 称为 X 的 Stone-Čech 紧化, 记为 βX.

推论 4.3.2　完全正则空间的任意两个 Stone-Čech 紧化是等价的.

证明　设 X 是完全正则空间, 让 Y_1 和 Y_2 是 X 的两个满足定理 4.3.5 条件的紧化. 让 $j_2 : X \to Y_2$ 是内射, 则 j_2 连续. 由假设, j_2 有连续扩张 $f_1 : Y_1 \to Y_2$. 同理, 内射 $j_1 : X \to Y_1$ 也有连续扩张 $f_2 : Y_2 \to Y_1$. 一方面, 复合函数 $f_2 \circ f_1 : Y_1 \to Y_1$ 是内射 $j_X : X \to Y_1$ 的连续扩张. 另一方面, 恒等映射 $i_{Y_1} : Y_1 \to Y_1$ 也是 j_X 的连续扩张. 根据引理 4.3.2, $f_2 \circ f_1 = i_{Y_1}$. 同理, $f_1 \circ f_2 = i_{Y_2}$. 由引理 1.1.2, f_1 是双射且 $f_1 = f_2^{-1}$, 从而 f_1 是同胚. 故 Y_1 与 Y_2 同胚. □

由定理 4.3.5, 如果 X 是完全正则空间, C 是紧的 Hausdorff 空间, 则任意连续映射 $f : X \to C$ 都有唯一的连续扩张 $g : \beta X \to C$.

习　题　4.3

4.3.1　证明: 局部紧性是有限可积性.

4.3.2　证明: 局部紧的 Hausdorff 空间中的每一点都有闭的紧邻域基.

4.3.3　证明: 若 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, 则 X 的单点紧化都是相互等价的.

4.3.4　证明: 用 $g(x) = \cos(1/x)$ 定义的有界连续函数 $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ 不能连续扩张到例 4.3.1 的 (3) 中的紧化. 定义一个拓扑嵌入 $h : (0, 1) \to [0, 1]^3$, 使得函数 x, $\sin(1/x)$ 及 $\cos(1/x)$ 都能连续扩张到由 h 所诱导的紧化上.

4.3.5　证明: $\mathbb{R}$ 的单点紧化同胚于 $\mathbb{R}^2$ 的子空间圆周 $\mathbb{S}^1$.

4.3.6　证明: $\mathbb{Z}_+$ 的单点紧化同胚于 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

4.3.7　设 Y 是拓扑空间 X 的任意一个紧化. 证明: 存在满的连续闭映射 $g : \beta X \to Y$, 使得在 X 上它等于恒等映射.

4.3.8　证明: 良序空间 $[0, \omega_1)$ 的单点紧化与 Stone-Čech 紧化是等价的.

4.3.9　设 X 是正规空间. 如果 $y \in \beta X - X$, 则 y 不是 X 中任一序列的极限.

4.4　完全度量空间

度量空间的完全性是现代分析学的基础内容之一, 它是用关于度量空间中点的序列的收敛来描述的. 虽然完全性只是一种度量性质, 而非拓扑性质, 但有许多涉及完全度量空间的定理具有丰富的拓扑色彩. 本节主要讨论一些重要的完全度量空间.

定义 4.4.1　设 (X, d) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的序列. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $k \in \mathbb{Z}_+$, 使得当 $n, m > k$ 时, 有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 是**柯西** (Cauchy) **序列**.

易知, 度量空间 (X, d) 中的每个收敛序列是这个空间中的柯西序列.

柯西序列依赖于度量空间的度量.

例 4.4.1　对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义

$$d_1(x,y) = |x-y|, \quad d_2(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|,$$

则 d_1 是 $\mathbb{R}$ 上的通常度量, d_2 是 $\mathbb{R}$ 上的另一个度量.

易证, $f:\mathbb{R} \to (-1,1)$ 定义为 $f(x) = x/(1+|x|)$ 是同胚映射, 所以 d_2 导出的度量拓扑是 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑. 序列 $\{n\}$ 不是 $(\mathbb{R}, d_1)$ 中的柯西序列, 但是 $(\mathbb{R}, d_2)$ 中的柯西序列. 事实上, 由于

$$d_2(n+l,\ n) = \left|\frac{n+l}{1+n+l} - \frac{n}{1+n}\right| = \frac{l}{(1+n+l)(1+n)} < \frac{1}{n},$$

所以对任一 $\varepsilon > 0$, 只要 $n > [1/\varepsilon]$ 时 ($[1/\varepsilon]$ 表示不超过 $1/\varepsilon$ 的最大整数), 对 $l \in \mathbb{Z}_+$, 都有 $d_2(n+l,\ n) < \varepsilon$, 所以序列 $\{n\}$ 在度量 d_2 下是柯西序列. 此外, $(\mathbb{R}, d_2)$ 中的柯西序列 $\{n\}$ 不收敛. 这表明, 柯西序列不是拓扑不变量, 柯西序列未必是收敛序列.

定义 4.4.2　设 (X, d) 是度量空间. 如果 X 中的每个柯西序列是收敛的, 则称 (X, d) 是**完全度量空间** (complete metric space).

由数学分析中的柯西收敛准则, 实空间 $\mathbb{R}$ 是完全度量空间.

例 4.4.2　设 $\mathbb{R}$ 是实空间具有通常的度量. $(-1,1)$ 作为 $\mathbb{R}$ 的度量子空间不是完全的.

$\mathbb{R}$ 同胚于 $(-1,1)$. 序列 $\{n/(n+1)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中, 也是 $(-1,1)$ 中的柯西序列. 它在 $\mathbb{R}$ 中收敛, 但在 $(-1,1)$ 中不收敛. 这表明度量空间的完全性不是拓扑不变量, 同时也表明度量空间的完全性不是遗传性.

例 4.4.3　n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是完全度量空间.

设 d 是 $\mathbb{R}^n$ 的欧氏度量, $\{x_i\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的柯西序列, 其中对每个 $i \in \mathbb{Z}_+$, 记 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$. 对每个 $k \leqslant n$ 及任意 $i, j \in \mathbb{Z}_+$,

$$|x_{ik} - x_{jk}| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - x_{jk})^2} = d(x_i, x_j).$$

因此, 对固定的 $k \leqslant n$, 序列 $\{x_{ik}\}$ 是实空间 $\mathbb{R}$ 中的柯西序列, 因而 $\{x_{ik}\}$ 收敛, 记它的极限是 $y_k \in \mathbb{R}$. 令 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

对任意 $\varepsilon > 0$ 及每个 $k \leqslant n$, 由于 $\{x_{ik}\}$ 收敛于 y_k, 存在正整数 m_k, 使得当 $i > m_k$ 时, 有 $|x_{ik} - y_k| < \varepsilon/\sqrt{n}$. 取 $m = \max\{m_k : k \leqslant n\}$. 对任意 $i > m$, 有

$$d(x_i, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - y_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

这表明序列 $\{x_i\}$ 收敛于 y, 于是 $\mathbb{R}^n$ 是完全的.

定理 4.4.1 (Cantor 定理, 1930)　度量空间 (X,d) 是完全的当且仅当 X 中任意满足下列两个条件的非空闭集列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 的交是单点集:

(i) $F_{n+1}\subset F_n,\ n\in\mathbb{Z}_+$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}(F_n)=0$.

证明　设度量空间 (X,d) 是完全的, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 的满足条件 (i) 和 (ii) 的非空闭集列. 对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$, 取定 $x_n\in F_n$, 则序列 $\{x_n\}$ 是柯西序列. 事实上, 对任意的 $\varepsilon>0$, 由 (ii), 存在正整数 k, 使得当 $n>k$ 时, 有 $\operatorname{diam}(F_n)<\varepsilon$. 于是当 $n,m>k$ 时, 由 (i), $x_n,x_m\in F_{k+1}$, 所以 $d(x_n,x_m)\leqslant\operatorname{diam}(F_{k+1})<\varepsilon$.

因为 (X,d) 是完全的, 设序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x\in X$. 对任意的 $k\in\mathbb{Z}_+$, 由于 $\{x_n:n\geqslant k\}\subset F_k$ 且 F_k 是闭集, 于是 $x\in F_k$. 故 $x\in\bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}F_k$. 如果 $y\in\bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}F_k$, 由 (ii), 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 n_0, 使得当 $n>n_0$ 时, 有 $\operatorname{diam}(F_n)<\varepsilon$. 因为 $x,y\in F_n$, 所以 $d(x,y)\leqslant\operatorname{diam}(F_n)<\varepsilon$. 由于 ε 的任意性, 有 $d(x,y)=0$, 从而 $x=y$. 即 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}F_n$ 是单点集.

反之, 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的柯西序列. 对每个 $k\in\mathbb{Z}_+$, 存在正整数 n_k, 使得当 $m,n\geqslant n_k$ 时, 有 $d(x_n,x_m)<1/2^k$. 不妨设 $n_k\leqslant n_{k+1},\ k\in\mathbb{Z}_+$.

对每个 $k\in\mathbb{Z}_+$, 令

$$F_k=\overline{B(x_{n_k},1/2^{k-1})},$$

则 $\operatorname{diam}(F_k)\leqslant 1/2^{k-2}$. 于是 $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}(F_k)=0$. 若 $y\in F_{k+1}$, 由 n_k 的选取, 有

$$d(y,x_{n_{k+1}})\leqslant\frac{1}{2^k},\quad d(x_{n_k},x_{n_{k+1}})<\frac{1}{2^k},$$

于是

$$d(y,x_{n_k})\leqslant d(y,x_{n_{k+1}})+d(x_{n_{k+1}},x_{n_k})<\frac{1}{2^{k-1}},$$

从而 $y\in F_k$, 即 $F_{k+1}\subset F_k$. 这表明非空闭集列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 满足条件 (i) 与 (ii). 由假设, 记 $\{x\}=\bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}F_k$. 往证 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

对 $k\in\mathbb{Z}_+$, 由于 $x\in F_k$, 所以 $d(x,x_{n_k})\leqslant 1/2^{k-1}$. 当 $n>n_k$ 时, $d(x_n,x_{n_k})<1/2^k$, 于是

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k-1}}<\frac{1}{2^{k-2}},$$

所以序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 故 (X,d) 是完全度量空间. □

定理 4.4.2　若 (X,d) 是完全度量空间, 则度量子空间 (A,d_A) 是完全的当且仅当 A 是 X 的闭子集.

证明 设度量子空间 (A,d_A) 是完全的. 若 $x\in\overline{A}$, 对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$, 令 $F_n=A\cap\overline{B_d(x,1/n)}$, 则 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是子空间 A 的非空闭子集列. 易证, 它满足定理 4.4.1 中的条件 (i) 和 (ii). 因为 (A,d_A) 是完全的, 根据定理 4.4.1, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}F_n$ 是单点集. 于是 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}F_n=\{x\}$, 从而 $x\in A$. 故 $\overline{A}=A$.

反之, 若 A 是 X 的闭子集且 $\{x_n\}$ 是 A 中的柯西序列, 则 $\{x_n\}$ 也是 X 中的柯西序列, 所以 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛. 由于 A 是 X 的闭子集, 其极限必属于 A. 故 (A,d_A) 是完全的. □

实空间 $\mathbb{R}$ 是完全的, 但不是紧的. 怎样的完全度量空间是紧的? 这是一个有趣的问题. 为此, 引入下述概念.

定义 4.4.3 设 (X,d) 是度量空间. 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在由 ε 球形邻域组成的 X 的有限覆盖, 则称度量空间 (X,d) 是*完全有界的* (totally bounded).

显然, 度量空间的完全有界性蕴含有界性, 反之未必成立. 如在标准有界度量 $\overline{d}(a,b)=\min\{|a-b|,1\}$ 之下, 实空间 $\mathbb{R}$ 是有界的, 但不是完全有界的.

定理 4.4.3 度量空间 (X,d) 是紧的当且仅当 (X,d) 是完全有界的完全度量空间.

证明 设度量空间 (X,d) 是紧的. 先证明 X 是完全的. 若 X 的非空闭集列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 满足定理 4.4.1 的条件 (i) 和 (ii), 由引理 4.2.1 和条件 (ii), 则 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}F_n$ 是单点集. 因而, X 是完全度量空间. 再证明 X 是完全有界的. 对任意 $\varepsilon>0$, 由 X 的全体 ε 球形邻域组成的集族 $\{B(x,\varepsilon):x\in X\}$ 是 X 的开覆盖, 它有有限子覆盖, 所以 X 是完全有界的.

反之, 设 (X,d) 是完全有界的完全度量空间. 要证 (X,d) 是紧的. 根据定理 4.1.3, 只需证明 (X,d) 是序列紧的. 由于 X 的完全性, 又只需证明 X 中的每个序列有子序列是柯西序列.

设 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列. 由 X 的完全有界性, 取 $\varepsilon=1$, 有限个半径为 1 的球形邻域 (简记为球) 覆盖 X, 所以至少有一个这样的球, 记为 B_1, 包含有无限项 x_n. 令 $J_1=\{n\in\mathbb{Z}_+:x_n\in B_1\}$, 则 J_1 是 $\mathbb{Z}_+$ 的无限子集. 同理, 有限个半径为 1/2 的球覆盖 X, 因为 J_1 是无限集, 于是至少有一个这样的球, 记为 B_2, 包含有无限项 x_n, $n\in J_1$. 令 $J_2=\{n\in J_1:x_n\in B_2\}$, 则 J_2 是 J_1 的无限子集. 一般地, 对 $k\in\mathbb{Z}_+$, 存在半径为 $1/k$ 的球 B_k, 使得 $J_k=\{n\in J_{k-1}:x_n\in B_k\}$ 是无限集. 由此, 可选取 $n_k\in J_k$ 使得 $n_k<n_{k+1}$, $k\in\mathbb{Z}_+$. 对序列 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 当 $i,j\geqslant k$ 时, 有 $n_i,n_j\in J_k$, 因而 $x_{n_i},x_{n_j}\in B_k$, 所以 $d(x_{n_i},x_{n_j})<2/k$. 这表明子序列 $\{x_{n_k}\}$ 是柯西序列. □

定义 4.4.4 设 X 是拓扑空间. 如果 X 中可数个稠密的开子集的交集是稠密

的, 则称 X 是 Baire 空间.

由定理 2.3.6, 对 $G \subset X$, $\overline{G} = X \Leftrightarrow (X - G)^\circ = \varnothing$. 由此, 拓扑空间 X 是 Baire 空间当且仅当若 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 中具有空内部的闭集列, 则 $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n\right)^\circ = \varnothing$.

定理 4.4.4 (Baire 定理, 1914)　完全度量空间是 Baire 空间.

证明　设 (X, d) 是完全度量空间, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 中稠密的开集列. 令 $G = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} G_n$. 要证 $\overline{G} = X$, 只要证明对 X 中的任意非空开集 U, 有 $G \cap U \neq \varnothing$.

设 U 是 X 中的非空开集. 因为 $\overline{G}_1 = X$, 所以 $U \cap G_1 \neq \varnothing$, 取 $x_1 \in G_1 \cap U$, 存在正数 $\varepsilon_1 < 1/2^2$, 使得 $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subset G_1 \cap U$. 因为 $\overline{G}_2 = X$ 且 $B(x_1, \varepsilon_1)$ 是 X 中的非空开集, 所以 $B(x_1, \varepsilon_1) \cap G_2 \neq \varnothing$, 取 $x_2 \in G_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1)$, 存在正数 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1/2$, 使得 $\overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \subset B(x_1, \varepsilon_1) \cap G_2$. 显然, $\overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \subset \overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \cap G_2 \cap U$. 继续上述过程, 得到 X 的闭集列 $\{F_n = \overline{B(x_n, \varepsilon_n)}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 满足: 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$,

(i) $F_{n+1} \subset F_n$;

(ii) $\mathrm{diam}(F_n) < 1/2^n$;

(iii) $F_n \subset G_n \cap U$.

根据定理 4.4.1, 有 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n \neq \varnothing$. 再由 (iii),

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} (G_n \cap U) = G \cap U,$$

所以 $G \cap U \neq \varnothing$. □

定理 4.4.5　局部紧的 Hausdorff 空间是 Baire 空间.

证明　设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 中稠密的开集列. 令 $G = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} G_n$. 要证明对 X 中的任意非空开集 U, $G \cap U \neq \varnothing$. 由定理 4.3.3, X 是正则空间. 与定理 4.4.4 类似的构造方法, 以紧邻域代替球形邻域, 可得到 X 的非空紧子集列 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 满足: 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$,

(i) $C_{n+1} \subset C_n$;

(ii) $C_n \subset G_n \cap U$.

由 C_1 的紧性及引理 4.2.1, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n \neq \varnothing$. 再由 (ii), $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n \subset G \cap U$, 所以 $G \cap U \neq \varnothing$. □

下面给出 Baire 空间的一个应用. 先给出以下引理.

引理 4.4.1　Baire 空间的每个开子空间是 Baire 空间.

证明　设 Y 是 Baire 空间 X 的开子空间. 让 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 Y 中具有空内

部的闭集列. 如果 $\operatorname{int}_Y\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n\right) \neq \varnothing$, 由于 Y 是 X 的开子集, 所以在 X 中 $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{A}_n\right)^{\circ} \neq \varnothing$. 因为 X 是 Baire 空间, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $A_n^{-\circ} \neq \varnothing$. 因为 $A_n^{-\circ}$ 是 X 中包含于 $\overline{A}_n$ 内的非空开集, 所以 $\varnothing \neq A_n^{-\circ} \cap A_n \subset \overline{A}_n \cap Y = A_n$ (见定理 2.4.2), 这与 $\operatorname{int}_Y(A_n) = \varnothing$ 矛盾. 故 $\operatorname{int}_Y\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n\right) = \varnothing$. 因此, Y 是 Baire 空间.

□

定理 4.4.6 设 $\{f_n\}$ 是 Baire 空间 X 到度量空间 (Y,d) 的连续函数列. 若函数 $f: X \to Y$ 满足对每个 $x \in X$, 序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$, 则使得 f 连续的点组成的集合在 X 中稠密.

证明 任意的 $\varepsilon > 0$ 及 $n, m \in \mathbb{Z}_+$, 因为 $\{f_n\}$ 是连续函数列, 所以集合 $\{x \in X : d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon\}$ 是 X 中的闭集. 对 $i \in \mathbb{Z}_+$, 令

$$A_i(\varepsilon) = \bigcap_{n,m\geqslant i} \{x \in X : d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon\},$$

则 $A_i(\varepsilon)$ 是 X 中的闭集, 且 $A_i(\varepsilon) \subset A_{i+1}(\varepsilon)$.

对任意的 $x_0 \in X$, 因为序列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛于 $f(x_0)$, 所以 $\{f_n(x_0)\}$ 是柯西序列, 于是存在 $i \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $x_0 \in A_i(\varepsilon)$. 因此, $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i(\varepsilon) = X$.

令

$$U(\varepsilon) = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} A_i^{\circ}(\varepsilon).$$

(1) $U(\varepsilon)$ 是 X 中的稠密开集.

设 V 是 X 的任意非空开集, 根据引理 4.4.1, V 是 Baire 空间. 由于

$$\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+} (V \cap A_i(\varepsilon)) = V \cap X = V,$$

且每个 $V \cap A_i(\varepsilon)$ 是 V 的闭集, 所以存在 $i_0 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $\operatorname{int}_V(V \cap A_{i_0}(\varepsilon)) \neq \varnothing$, 于是 $\operatorname{int}_V(V \cap A_{i_0}(\varepsilon))$ 也是 X 的非空开集, 所以 $\operatorname{int}_V(V \cap A_{i_0}(\varepsilon)) \subset V \cap A_{i_0}^{\circ}(\varepsilon) \subset V \cap U(\varepsilon)$, 即 $\overline{U(\varepsilon)} = X$.

由于 X 是 Baire 空间, $C = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} U(1/n)$ 是 X 的稠密子集.

(2) 函数 f 在集合 C 的每一点都连续.

对任意的 $\varepsilon > 0$ 及任意的 $x_0 \in C$, 选取 $k \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $1/k < \varepsilon/3$. 因为 $x_0 \in U(1/k)$, 存在 $i \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $x_0 \in A_i^{\circ}(1/k)$. 由于 f_i 连续, 存在 x_0 的开邻域 $W \subset A_i(1/k)$ 使得当 $x \in W$ 时, 有 $d(f_i(x_0), f_i(x)) < \varepsilon/3$. 对任意的 $n > i$ 及 $x \in W$,

由于 $W \subset A_i(1/k)$, $d(f_n(x), f_i(x)) \leqslant 1/k$. 令 $n \to \infty$, 则 $d(f(x), f_i(x)) \leqslant 1/k < \varepsilon/3$. 因为 $x_0 \in W$, 所以 $d(f(x_0), f_i(x_0)) < \varepsilon/3$. 于是, 对 $x \in W$, 有

$$d(f(x), f(x_0)) \leqslant d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) < \varepsilon.$$

故 f 在 x_0 连续. □

习　题　4.4

4.4.1　证明: $\mathbb{R}^n$ 关于平方度量是完全度量空间.

4.4.2　设 (X, d) 是度量空间. 如果 X 中的柯西序列 $\{x_n\}$ 有聚点 x_0, 则 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0.

4.4.3　设 X 是度量空间.

(1) 证明: 如果对某个 $\varepsilon > 0$, X 中的每个 ε 球形邻域的闭包是紧的, 则 X 是完全的.

(2) 假定对每个 $x \in X$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得球形邻域 $B(x, \varepsilon)$ 的闭包是紧的. 举例说明, X 未必是完全的.

4.4.4　证明: 如果 X 中的每一点 x 都有邻域是 Baire 空间, 则 X 是 Baire 空间.

4.4.5　证明: 无理数集作为实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间是 Baire 空间.

4.4.6 (压缩映像原理)　设 (X, d) 是完全度量空间. 如果函数 $f: X \to X$ 满足: 存在正数 $\alpha < 1$, 使得对任意的 $x, y \in X$, 有 $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$, 证明存在唯一的 $x \in X$, 使得 $f(x) = x$.

4.4.7　设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 都是度量空间, Y 是完全的. 如果 $A \subset X$ 且 $f: A \to Y$ 一致连续, 证明 f 可以唯一地扩张成一个一致连续函数 $g: \overline{A} \to Y$.

4.4.8 (Peano 曲线定理, 1890)　设 $I = [0, 1]$. 证明: 存在连续的满映射 $f: I \to I^2$. f 称为一条*充满空间的曲线*或 Peano *曲线*.

4.5　仿 紧 空 间

正规空间是 T_2 紧空间和度量空间的共同推广, 具有许多重要的性质. 本节要介绍的仿紧空间是紧空间和度量空间的共同推广, 具有更丰富的结构, 并且 T_2 仿紧空间是正规空间. 它在微分几何、动力系统等数学分支中都有突出的应用. 先给出局部有限 (离散) 集族的概念和有关的引理.

定义 4.5.1　设 X 是拓扑空间, $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族. 如果对任意的 $x \in X$, 存在 x 的邻域至多与 $\mathscr{A}$ 的有限个 (一个) 元素相交, 则称 $\mathscr{A}$ 是*局部有限* (*离散*) *的*.

空间 X 的可数个局部有限 (离散) 集族的并称为 σ *局部有限* (σ *离散*) 的集族.

显然, 离散集族是局部有限集族; 可数集族是 σ 离散的.

引理 4.5.1　设 X 是拓扑空间. 若 $\mathscr{A}$ 是 X 的局部有限的集族, 则

(1) $\mathscr{A}$ 的任意子族是局部有限的;

(2) $\mathscr{A}$ 中元素的闭包组成的族 $\overline{\mathscr{A}} = \{\overline{A} : A \in \mathscr{A}\}$ 也是局部有限的;

(3) $\overline{\cup\{A : A \in \mathscr{A}\}} = \cup\{\overline{A} : A \in \mathscr{A}\}$.

证明 (1) 显然成立.

(2) 对 $x \in X$ 及 x 的开邻域 U, 若 $A \in \mathscr{A}$, 由推论 2.3.1, 则 $U \cap A = \varnothing \Leftrightarrow U \cap \overline{A} = \varnothing$, 所以 U 至多与 $\mathscr{A}$ 中的有限个元素相交当且仅当 U 至多与 $\overline{\mathscr{A}}$ 中的有限个元素相交. 从而, $\overline{\mathscr{A}}$ 是局部有限的.

(3) 显然, $\cup\{\overline{A} : A \in \mathscr{A}\} \subset \overline{\cup\{A : A \in \mathscr{A}\}}$. 下证相反的包含关系. 设 $x \notin \cup\{\overline{A} : A \in \mathscr{A}\}$, 由于 $\mathscr{A}$ 的局部有限性, 存在 x 的邻域 V 仅与 $\mathscr{A}$ 中的有限个元素相交, 记其为 A_i, $i \leqslant m$. 由于 $x \notin \bigcup\limits_{i \leqslant m} \overline{A}_i$, 令 $U = V \cap \left(X - \bigcup\limits_{i \leqslant m} \overline{A}_i\right)$, 则 U 是 x 的邻域且对任意 $A \in \mathscr{A}$, 有 $U \cap A = \varnothing$. 因而, $U \cap (\cup\{A : A \in \mathscr{A}\}) = \varnothing$. 故 $x \notin \overline{\cup\{A : A \in \mathscr{A}\}}$, 即 $\overline{\cup\{A : A \in \mathscr{A}\}} \subset \cup\{\overline{A} : A \in \mathscr{A}\}$. □

推论 4.5.1 设 $\mathscr{A}$ 是拓扑空间 X 的局部有限的子集族. 若 $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$, 则 $\cup\{\overline{A} : A \in \mathscr{A}'\}$ 是 X 的闭集.

定义 4.5.2 设 X 是拓扑空间, $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ 都是 X 的覆盖. 如果对每个 $V \in \mathscr{V}$, 都存在 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $V \subset U$, 则称 $\mathscr{V}$ *加细* $\mathscr{U}$, 或 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的*加细*; 如果更设 $\mathscr{V}$ 的每个元素是开 (闭) 集, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的*开 (闭) 加细*.

定义 4.5.3 (J. Dieudonné, 1944) 设 X 是拓扑空间. 如果 X 的任意开覆盖都存在局部有限的开加细, 则称 X 是*仿紧空间*.

显然, 紧空间是仿紧空间. 反之不一定成立. 具有无限个元素的离散空间是仿紧的非紧空间. 因为这个空间中由全体单点集组成的集族是任意开覆盖的局部有限的开加细, 但它本身没有有限子覆盖.

定理 4.5.1 拓扑空间 X 是紧空间当且仅当它是可数紧的仿紧空间.

证明 必要性是显然的, 下证充分性. 设 X 是可数紧的仿紧空间, 但不是紧空间. 存在 X 的某个开覆盖 $\mathscr{U}$ 没有有限子覆盖. 由 X 的仿紧性, $\mathscr{U}$ 存在局部有限的开加细 $\mathscr{V}$. 显然, $\mathscr{V}$ 也没有有限子覆盖. 因此, 可选取 $\mathscr{V}$ 中的元素列 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, 使得每个 $V_n - \bigcup\limits_{i<n} V_i \neq \varnothing$, $n \in \mathbb{Z}_+$. 取定 $x_n \in V_n - \bigcup\limits_{i<n} V_i$, $n \in \mathbb{Z}_+$. 因为 X 可数紧, 序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点 x, 则 x 的任何邻域都包含无限个 x_n, 从而与无限个 V_n 相交. 这与 $\mathscr{V}$ 是局部有限的矛盾. □

定理 4.5.2 仿紧空间的每个闭子空间是仿紧的.

证明 设 Y 是仿紧空间 X 的闭子空间. $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in J\}$ 是子空间 Y 的开覆盖. 对每个 $\alpha \in J$, 存在 X 的开集 U_α 使得 $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. 集族 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\} \cup \{X - Y\}$ 是 X 的开覆盖, 由 X 的仿紧性, 存在 X 的局部有限开覆盖 $\mathscr{W}$ 加细 $\mathscr{U}$. 于是, $\{W \cap Y : W \in \mathscr{W}\}$ 是子空间 Y 的局部有限覆盖且加细 $\mathscr{V}$, 所以 Y 是仿

紧空间. □

仿紧空间的开子空间未必还是仿紧空间. 如良序空间 $[0,\omega_1]$ 是紧空间, 从而是仿紧空间. 它的开子空间 $[0,\omega_1)$ 是非紧的可数紧空间 (见例 4.1.1), 由定理 4.5.1, $[0,\omega_1)$ 不是仿紧空间.

定理 4.5.3 Hausdorff 的仿紧空间是正规空间.

证明 设 X 是 Hausdorff 的仿紧空间. 先证 X 是正则空间. 设 F 是 X 中的闭子集及 $x\in X-F$. 对每个 $y\in F$, 由于 X 是 Hausdorff 空间, 存在 X 中不相交的开集 U_y, W_x 分别包含点 y, x, 那么 $\overline{U}_y\cap W_x=\varnothing$ (见推论 2.3.1), 从而 $x\notin\overline{U}_y$. 设 $\mathscr{U}=\{U_y:y\in F\}\cup\{X-F\}$, 则 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 由于 X 是仿紧空间, 存在 X 的局部有限开覆盖 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{U}$. 令 $\mathscr{V}_1=\{V\in\mathscr{V}:V\cap F\neq\varnothing\}$, 则 $\mathscr{V}_1$ 覆盖 F. 令 $U=\bigcup_{V\in\mathscr{V}_1}V$, 则 U 是 X 中包含 F 的开集. 由于 $\mathscr{V}$ 是局部有限的, 根据引理 4.5.1 的 (1) 与 (3), 有 $\overline{U}=\bigcup_{V\in\mathscr{V}_1}\overline{V}$. 如果 $x\in\overline{U}$, 则存在 $V\in\mathscr{V}_1$ 使得 $x\in\overline{V}$. 由 $\mathscr{V}_1$ 的定义, 存在 $y\in F$ 使得 $V\subset U_y$, 从而 $x\in\overline{U}_y$. 这矛盾表明 $x\notin\overline{U}$. 故 X 的不相交开集 U, $X-\overline{U}$ 分别包含 F, x. 因此, X 是正则空间.

再证 X 是正规空间. 设 A, B 是 X 中不相交的闭子集. 由 X 的正则性, 对每个 $x\in B$, 存在 X 中不相交的开集 U_x, V_x 使得 $A\subset U_x$, $x\in V_x$. 这时, $A\cap\overline{V}_x=\varnothing$. 设 $\mathscr{V}=\{V_x:x\in B\}\cup\{X-B\}$, 则 $\mathscr{V}$ 是 X 的开覆盖, 于是存在 X 的局部有限开覆盖 $\mathscr{W}$ 加细 $\mathscr{V}$. 令

$$\mathscr{W}_1=\{W\in\mathscr{W}:W\cap B\neq\varnothing\},\quad V=\bigcup_{W\in\mathscr{W}_1}W,$$

则 V 是 X 中含有 B 的开集且根据引理 4.5.1, $\overline{V}=\bigcup_{W\in\mathscr{W}_1}\overline{W}$. 对每个 $W\in\mathscr{W}_1$, 有 $A\cap\overline{W}=\varnothing$, 从而 $A\cap\overline{V}=\varnothing$. 令 $U=X-\overline{V}$, 则 U, V 是 X 中分别包含 A, B 的不相交开集, 所以 X 是正规空间. □

由此可见, 仿紧空间与紧空间有一些类似的性质. 定理 3.6.3 表明, Hausdorff 空间的每个紧子集是闭的. 但这个结果对仿紧空间不成立. 例如, 集合 $X=\{0\}\cup\{1/n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ 作为实空间 $\mathbb{R}$ 的子空间是紧的 Hausdorff 空间, X 的子空间 $K=\{1/n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ 是离散空间, 所以是仿紧的子空间, 但是 K 不是 X 的闭子集.

下面的定理给出仿紧空间的刻画.

定理 4.5.4 (E. Michael, 1953) 设 X 是正则空间. 下列各条等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每个开覆盖都有 σ 局部有限的开加细;

(3) X 的每个开覆盖都有局部有限的加细;

(4) X 的每个开覆盖都有局部有限的闭加细.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的任意一个开覆盖, 让 $\mathscr{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{V}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限的开加细, 其中每个 $\mathscr{V}_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ 是 X 的局部有限的开集族.

对每个 $i \in \mathbb{Z}_+$, 令 $V_i = \bigcup_{V\in\mathscr{V}_i} V$. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 及 $V \in \mathscr{V}_n$, 令 $W(n,V) = V - \bigcup_{i<n} V_i$, 置

$$\mathscr{W}_n = \{W(n,V) : V \in \mathscr{V}_n\}, \quad \mathscr{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{W}_n.$$

往证 $\mathscr{W}$ 是 X 的局部有限覆盖. 设 $x \in X$, 因为 $\mathscr{V}$ 是 X 的覆盖, 存在最小的正整数 n, 使得 $x \in V_n$. 取定 $V \in \mathscr{V}_n$ 使得 $x \in V$, 那么 $x \in W(n,V) \in \mathscr{W}$. 对任意的 $k > n$ 及 $V' \in \mathscr{V}_k$, 有 $V \cap W(k,V') \subset V_n \cap (X - V_n) = \varnothing$. 因此, $W(n,V)$ 与 $\mathscr{W}_k$ $(k > n)$ 中的任意元素都不相交. 对 $i \leqslant n$, 因为 $\mathscr{V}_i$ 是局部有限的, 存在 x 的邻域 U_i 仅与 $\mathscr{V}_i$ 中有限个元素相交, 从而 U_i 也仅与 $\mathscr{W}_i$ 中有限个元素相交. 令

$$U = W(n,V) \cap U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n,$$

则 U 是 x 的邻域, 仅与 $\mathscr{W}$ 的有限个元素相交.

显然, $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细. (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$ 是 X 的任意一个开覆盖. 对每个 $x \in X$, 存在 $\alpha \in J$ 使得 $x \in U_\alpha$. 由 X 的正则性, 存在 x 的开邻域 V_x 使得 $\overline{V}_x \subset U_\alpha$.

令 $\mathscr{V} = \{V_x : x \in X\}$, 则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细. $\mathscr{V}$ 存在局部有限的加细 $\mathscr{W}$. 令 $\mathscr{W}_1 = \{\overline{W} : W \in \mathscr{W}\}$, 根据引理 4.5.1 的 (2), 则 $\mathscr{W}_1$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的闭加细.

(4) $\Rightarrow$ (1). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的任意一个开覆盖. 记 $\mathscr{U}$ 的局部有限加细为 $\mathscr{V} = \{V_t : t \in T\}$.

对每个 $x \in X$, 由 $\mathscr{V}$ 的局部有限性, 存在 x 的开邻域 A_x 仅与 $\mathscr{V}$ 的有限个元素相交. 令 $\mathscr{A} = \{A_x : x \in X\}$, 则 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖, 于是它有局部有限的闭加细 $\mathscr{F}$.

对每个 $t \in T$, 令

$$W_t = X - \cup\{F \in \mathscr{F} : F \cap V_t = \varnothing\}.$$

由于 $\mathscr{F}$ 是 X 的局部有限的闭集族, 根据引理 4.5.1 的 (3), W_t 是 X 的开子集且 $V_t \subset W_t$. 如果 $F \in \mathscr{F}$, 则

$$W_t \cap F \neq \varnothing \Leftrightarrow V_t \cap F \neq \varnothing. \tag{4.5.1}$$

因为 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细, 对每个 $t \in T$, 可以选取 $U_t \in \mathscr{U}$ 使得 $V_t \subset U_t$. 令 $W_t' = W_t \cap U_t$. 则 $\mathscr{W}' = \{W_t' : t \in T\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细. 往证 $\mathscr{W}'$ 是局部有限的.

设 $x \in X$, 由 $\mathscr{F}$ 的局部有限性, 存在 x 的邻域 O 仅与 $\mathscr{F}$ 中的有限个元素相交, 记其为 F_i, $i \leqslant m$. 因为 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细, 所以对每个 $i \leqslant m$, 存在 $A_{x_i} \in \mathscr{A}$ 使得 $F_i \subset A_{x_i}$. 由于每个 A_{x_i} 仅与 $\mathscr{V}$ 的有限个元素相交, 所以每个 F_i 仅与 $\mathscr{V}$ 中的有限个 V_t 相交. 根据 (4.5.1), 每个 F_i 仅与有限个 W_t 相交. 由于 $O \subset \bigcup\limits_{i \leqslant m} F_i$, 于是 x 的邻域 O 仅与有限个 W_t 相交, 从而仅与有限个 W_t' 相交. □

推论 4.5.2 正则的 Lindelöf 空间是仿紧的.

例 4.5.1 两个仿紧空间的积空间未必是仿紧空间.

设 $\mathbb{R}_l$ 是下限拓扑空间 (见例 2.2.4 (2)). 因为 $\mathbb{R}_l$ 是正则的 Lindelöf 空间 (见例 3.7.2). 由推论 4.5.2, $\mathbb{R}_l$ 是仿紧空间. 由于 $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ 不是正规空间 (见例 3.4.3), 由定理 4.5.3, $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ 不是仿紧空间.

本节最后介绍的 Stone 定理是度量空间良好性质的杰出表现. 这定理也是现代一般拓扑学发展的一个里程碑.

对度量空间 (X,d) 的非空子集 A, B, 定义 A 与 B 之间的*距离* $d(A,\ B)$ 为

$$d(A,\ B) = \inf\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

定理 4.5.5 (Stone *定理*, 1948) 度量空间的每个开覆盖有 σ 离散的开加细.

证明 设 (X,d) 是度量空间, $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$ 是 X 的开覆盖. 对每个 $\alpha \in J$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 令

$$U_{\alpha,n} = \{x \in X : B(x, 1/2^n) \subset U_\alpha\}, \tag{4.5.2}$$

则 $U_\alpha = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} U_{\alpha,n}$, 并且 $x \in U_{\alpha,n}$ 当且仅当 $d(x,\ X - U_{\alpha,n}) \geqslant 1/2^n$.

如果 $x \in U_{\alpha,n}$, $y \notin U_{\alpha,n+1}$, 则

$$d(x,y) > \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{4.5.3}$$

事实上, 当 $x \in U_{\alpha,n}$, $y \notin U_{\alpha,n+1}$ 时, 由 (4.5.2),

$$d(x, X - U_\alpha) \geqslant \frac{1}{2^n}, \quad d(y, X - U_\alpha) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

因而

$$d(x, X - U_\alpha) - d(y, X - U_\alpha) > \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}},$$

由定理 3.1.6 的证明, 有

$$d(x,y) \geqslant |d(x, X - U_\alpha) - d(y, X - U_\alpha)| > \frac{1}{2^{n+1}}.$$

由 Zermelo 良序定理, 把指标集 J 良序化. 对每个 $\alpha\in J$, $n\in\mathbb{Z}_+$, 令

$$U^*_{\alpha,n}=U_{\alpha,n}-\bigcup_{\gamma<\alpha}U_{\gamma,n+1}. \tag{4.5.4}$$

对任意 $\alpha,\beta\in J$, $\alpha\neq\beta$, 按 $\alpha<\beta$ 或 $\alpha>\beta$, 由 (4.5.4),

$$U^*_{\beta,n}\subset X-U_{\alpha,n+1} \text{ 或 } U^*_{\alpha,n}\subset X-U_{\beta,n+1}. \tag{4.5.5}$$

如果 $x\in U^*_{\alpha,n}$, $y\in U^*_{\beta,n}$, 由 (4.5.4) 和 (4.5.5) 两式, 则当 $\alpha<\beta$ 时, $x\in U_{\alpha,n}$, $y\notin U_{\alpha,n+1}$; 当 $\alpha>\beta$ 时, $y\in U_{\beta,n}$, $x\notin U_{\beta,n+1}$. 所以由 (4.5.3), 总有 $d(x,y)>1/2^{n+1}$, 即

$$d(U^*_{\alpha,n},\ U^*_{\beta,n})\geqslant\frac{1}{2^{n+1}}. \tag{4.5.6}$$

对任意的 $x\in X$, 令 $\alpha=\min\{\gamma\in J:\ x\in U_\gamma\}$, 则 $x\in U_\alpha$. 因而存在 $n\in\mathbb{Z}_+$, 使 $x\in U_{\alpha,n}$. 由 (4.5.4), $x\in U^*_{\alpha,n}$. 这就表明

$$\bigcup_{\alpha\in J,n\in\mathbb{Z}_+}U^*_{\alpha,n}=X. \tag{4.5.7}$$

对任意的 $\alpha\in J$, $n\in\mathbb{Z}_+$, 令

$$U^+_{\alpha,n}=\left\{x\in X: d(x,U^*_{\alpha,n})<\frac{1}{2^{n+3}}\right\}.$$

易知

$$U^*_{\alpha,n}\subset U^+_{\alpha,n}\subset U_\alpha. \tag{4.5.8}$$

由 (4.5.6) 及三角不等式, 见图 4.5.1, 易证对 $\alpha,\beta\in J$, $\alpha\neq\beta$,

$$d(U^+_{\alpha,n},\ U^+_{\beta,n})\geqslant\frac{1}{2^{n+2}}.$$

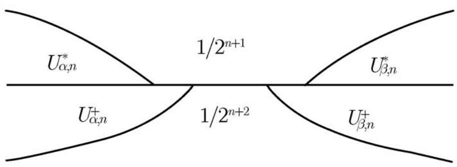


图 4.5.1

于是对 $x\in X$, $B(x,1/2^{n+3})$ 至多与 $\mathscr{V}_n=\{U^+_{\alpha,n}:\alpha\in J\}$ 中的一个元素相交, 所以 $\mathscr{V}_n$ 是 X 的离散开集族. 再由 (4.5.7) 和 (4.5.8), $\mathscr{V}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathscr{V}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散开加细. □

推论 4.5.3 度量空间是仿紧空间.

习 题 4.5

4.5.1 证明: 紧空间与仿紧空间的积空间是仿紧空间.

4.5.2 证明: Lindelöf 空间中的局部有限集族是可数的.

4.5.3 证明: 拓扑空间 X 是可数紧空间当且仅当 X 的每个局部有限集族是有限的.

4.5.4 设 T_1 空间 X 的每个开覆盖都有局部有限的闭加细. 证明: X 是正规空间.

4.5.5 设 X 是 Hausdorff 的局部紧的连通空间. 证明: X 是仿紧空间当且仅当 X 是 Lindelöf 空间.

4.5.6 设 X 是正则空间. 证明:

(1) 若 X 是有限个仿紧的闭子空间的并, 则 X 是仿紧的;

(2) 若 X 是可数个仿紧的闭子空间的并, 且这些闭子空间的内部覆盖 X, 则 X 是仿紧的.

4.5.7 (A. Stone, 1948) 证明: 度量空间的每个开覆盖有局部有限且 σ 离散的开加细.

4.6 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理

在 3.8 节中的 Urysohn 度量化定理给出了拓扑空间可度量化的充分条件, 这个条件较简单, 应用也较为方便. 但是, 它的条件 (正则空间具有可数基) 强一些, 所得到的结果也较强 (可分的度量空间). 寻找拓扑空间可度量化的充分且必要条件是数学家们所希望的. R. H. Bing (美, 1914~1986), 和 J. Nagata (日, 1925~2007), Ju. M. Smirnov (俄, 1921~) 分别用 σ 离散基和 σ 局部有限基代替 Urysohn 度量化定理中的可数基条件, 刻画了拓扑空间的度量化. 这就是本节的 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理. 先给出有关的定义和引理.

定义 4.6.1 设 X 是拓扑空间, $A \subset X$. 如果 A 是 X 的可数个开子集的交, 则称 A 为 X 的 G_δ 集. 如果 A 是 X 的可数个闭子集的并, 则称 A 为 X 的 F_σ 集.

显然, 拓扑空间 X 的子集 A 是 G_δ 集当且仅当 $X - A$ 是 F_σ 集. 易证, 度量空间中的每个闭集是 G_δ 集 (见习题 4.6.1).

引理 4.6.1 若 X 是具有 σ 局部有限基的正则空间, 则 X 是正规的且 X 的每个闭子集是 G_δ 集.

证明 因为拓扑空间 X 具有 σ 局部有限的基, 所以 X 的每个开覆盖具有 σ 局部有限的开加细, 由定理 4.5.4, X 是仿紧空间. 再由定理 4.5.3, X 是正规空间.

记 $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{B}_n$ 是 X 的 σ 局部有限基, 其中每个 $\mathscr{B}_n$ 是局部有限的. 设 W 是 X 的开集. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令

$$U_n = \cup\{B \in \mathscr{B}_n : \overline{B} \subset W\}.$$

由引理 4.5.1, $\overline{U}_n \subset W$. 从而, $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{U}_n \subset W$. 另一方面, 对每个 $x \in W$, 由 X 的正则性, 存在 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B \subset \overline{B} \subset W$, 于是存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 有 $B \in \mathscr{B}_n$, 所以 $x \in U_n$. 从而, $W \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{U}_n$. 这就证明了 $W = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{U}_n$. 即 X 的每个开集是 F_σ 集, 于是 X 的每个闭集是 G_δ 集. □

引理 4.6.2 设 X 是正规空间. 若 A 是 X 中闭的 G_δ 集, 则存在连续函数 $f : X \to [0,1]$, 使得 $x \in A$ 当且仅当 $f(x) = 0$.

证明 因为 A 是 X 的 G_δ 集, 存在 X 的开集列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, 使得 $A = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n$. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, $A \subset U_n$, 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $f_n : X \to [0,1]$, 使得当 $x \in A$ 时, $f_n(x) = 0$; 当 $x \notin U_n$ 时, $f_n(x) = 1$. 定义函数 $f : X \to [0,1]$ 为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x), \quad x \in X.$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n)$ 的收敛性, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n) f_n(x)$ 在 X 上一致收敛. 根据一致收敛定理 (参考定理 3.1.8 及习题 3.1.7), f 连续. 显然, 当 $x \in A$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \notin A$ 时, $f(x) > 0$. □

设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的覆盖, 对 $x \in X$, 记

$$\mathrm{st}(x, \mathscr{U}) = \cup\{U \in \mathscr{U} : x \in U\}.$$

定理 4.6.1 (Bing-Nagata-Smirnov *度量化定理*, 1950, 1951) 对正则空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是可度量化空间;

(2) X 具有 σ 离散的基;

(3) X 具有 σ 局部有限的基.

证明 (1) ⇒ (2). 设 (X, d) 是度量空间. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 置 $\mathscr{U}_n = \{B(x, 1/2^n) : x \in X\}$. 显然, 对每个 $x \in X$, $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset B(x, 1/n)$. 由 Stone 定理 (见定理 4.5.5), $\mathscr{U}_n$ 具有 σ 离散的开加细 $\mathscr{V}_n$. 由于 $\mathscr{V}_n$ 加细 $\mathscr{U}_n$, 对每个 $x \in X$, $\mathrm{st}(x, \mathscr{V}_n) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$. 置 $\mathscr{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{V}_n$. 对每个 $x \in X$ 及每个包含 x 的开集 U, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使 $x \in B(x, 1/n) \subset U$, 取 $\mathscr{V}_n$ 中任一包含点 x 的开集 V, 则 $V \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{V}_n) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset B(x, 1/n)$, 所以 $x \in V \subset U$. 因此, $\mathscr{V}$ 是 X 的 σ 离散基.

(2) ⇒ (3). 显然的.

(3) ⇒ (1). 设正则空间 X 具有 σ 局部有限基 $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{B}_n$, 其中每个 $\mathscr{B}_n$ 是局部有限的. 由引理 4.6.1 和引理 4.6.2, 可得

(i) 如果 W 是 X 中的开集, 则存在连续函数 $f: X \to [0,1]$, 使得 $x \in W$ 当且仅当 $f(x) > 0$.

(ii) 存在某个指标集 $J \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathscr{B}$, 使得 X 可以拓扑嵌入积空间 $[0,1]^J$.

对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 及任意的 $B \in \mathscr{B}_n$, 由 (i), 存在连续函数 $f_{n,B}: X \to [0,1/n]$, 使得 $x \in B$ 当且仅当 $f_{n,B}(x) > 0$. 对任意的 $x_0 \in X$ 及 X 中不包含 x_0 的任意闭集 A, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 及 $B \in \mathscr{B}_n$ 使得 $x_0 \in B \subset X - A$, 从而 $f_{n,B}(x_0) \notin \overline{f_{n,B}(A)}$. 于是连续函数族 $\{f_{n,B} : n \in \mathbb{Z}_+, B \in \mathscr{B}_n\}$ 分离 X 中的点与闭集. 令 $J = \{(n,B) : n \in \mathbb{Z}_+,\ B \in \mathscr{B}_n\}$, 则 $J \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathscr{B}$. 定义函数 F: $X \to [0,1]^J$ 为

$$F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B)\in J}, \quad x \in X.$$

根据引理 3.8.1 (嵌入引理), 相对于 $[0,1]^J$ 的积拓扑而言, 函数 F 是拓扑嵌入.

(iii) 相对于 $[0,1]^J$ 的一致拓扑而言, 函数 F 是拓扑嵌入.

函数 F 仍是单射. 设 $\overline{\rho}$ 是 $\mathbb{R}^J$ 上的一致度量 (见定义 3.8.1). 对任意的 $x = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$, $y = (y_\alpha)_{\alpha\in J} \in [0,1]^J$,

$$\overline{\rho}(x,y) = \sup\{|x_\alpha - y_\alpha| : \alpha \in J\}.$$

根据例 3.8.3, $\overline{\rho}$ 诱导的 $[0,1]^J$ 上的拓扑细于它上的积拓扑. 因而, 相对于一致度量, 函数 F 把 X 中的开集映为 $[0,1]^J$ 的子空间 $Z = F(X)$ 中的开集. 往证 F 连续.

对每个 $x_0 \in X$, 任意的 $\varepsilon > 0$ 及 $n \in \mathbb{Z}_+$, 由于 $\mathscr{B}_n$ 是局部有限的, 存在 x_0 的邻域 U_n 仅与 $\mathscr{B}_n$ 中的有限个元相交, 记它们为 $B_{n,i}$, $i \leqslant k$. 对 $B = B_{n,i}$, 由 $f_{n,B}$ 的连续性, 存在 x_0 的邻域 $V_{n,B} \subset U_n$, 使得当 $x \in V_{n,B}$ 时, 有

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.6.1}$$

令 $V_n = \cap\{V_{n,B} : B = B_{n,i},\ i \leqslant k\}$, 则 V_n 是 x_0 的邻域, 且当 $x \in V_n$ 及 $B \in \mathscr{B}_n$ 时, 有 (4.6.1) 式成立. 这只需注意到, 如果 $B \in \mathscr{B}_n - \{B_{n,i} : i \leqslant k\}$, 则 $V_n \cap B = \varnothing$, 由 $f_{n,B}$ 的定义, 当 $x \in V_n$ 时, $f_{n,B}(x) = 0$.

选取 $m \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $2/m < \varepsilon$. 令 $W = \bigcap\limits_{i\leqslant m} V_i$, 则 W 是 x_0 的邻域. 对任意 $x \in W$ 及 $(n,B) \in J$, 如果 $n \leqslant m$, 则 (4.6.1) 式成立; 如果 $n > m$, 则

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leqslant \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\overline{\rho}((F(x), F(x_0)) = \sup\{|f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)| : \alpha \in J\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

从而, F 是连续的. 故 $F : X \to [0,1]^J$ 是拓扑嵌入. 因此, X 是可度量化空间. □

定理 4.6.1 的 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 称为 Bing 度量化定理, (1) $\Leftrightarrow$ (3) 称为 Nagata-Smirnov 度量化定理.

定义 4.6.2 设 X 是拓扑空间. 如果对每个 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U 作为 X 的子空间是可度量化的, 则称 X 是局部可度量化的.

定理 4.6.2 (Smirnov 度量化定理, 1951) 拓扑空间 X 是可度量化的当且仅当 X 是 Hausdorff, 仿紧且局部可度量化的空间.

证明 必要性来自定理 3.4.6 及推论 4.5.3. 下面证明充分性.

设 X 是 Hausdorff, 仿紧且局部可度量化的空间. 由定理 4.5.3, X 是正规的. 根据 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理, 只需证 X 具有 σ 局部有限的基.

由于 X 是局部可度量化空间, 设 $\mathscr{U}$ 是由可度量化的开集组成的 X 的覆盖, 再由 X 的仿紧性, $\mathscr{U}$ 存在局部有限的开加细 $\mathscr{V}$. 对每个 $V \in \mathscr{V}$, 由定理 3.1.4, V 是可度量化的. 设 d_V 是子空间 V 上的度量. 对每个 $x \in V$, $\varepsilon > 0$, 令 $B_V(x,\varepsilon) = \{y \in V : d_V(x,y) < \varepsilon\}$, 则 $B_V(x,\varepsilon)$ 是 V 中的开集, 从而也是 X 中的开集.

对每个 $m \in \mathbb{Z}_+$, 令 $\mathscr{A}_m = \{B_V(x,1/m) : x \in V \in \mathscr{V}\}$, 则 $\mathscr{A}_m$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的仿紧性, $\mathscr{A}_m$ 存在局部有限的开加细 $\mathscr{B}_m$. 令 $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{B}_m$, 则 $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 局部有限的开集族. 往证 $\mathscr{B}$ 是 X 的基.

设 $x \in X$ 及 U 是 x 的邻域. 由于 $\mathscr{V}$ 是 X 的局部有限覆盖, x 仅属于 $\mathscr{V}$ 中的有限个元素, 记其为 $V_1, V_2, \cdots, V_k$. 对每个 $i \leqslant k$, $V_i \cap U$ 是子空间 V_i 中 x 的邻域, 所以存在 $\varepsilon_i > 0$, 使得 $B_{V_i}(x,\varepsilon_i) \subset V_i \cap U$. 选取 $m \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $2/m < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k\}$. 因为 $\mathscr{B}_m$ 是 X 的覆盖, 所以存在 $B \in \mathscr{B}_m$, 使得 $x \in B$. 又因为 $\mathscr{B}_m$ 加细 $\mathscr{A}_m$, 存在 $V \in \mathscr{V}$ 及 $y \in V$, 使得 $B \subset B_V(y,1/m)$. 因而 $x \in B \subset B_V(y,1/m)$, 所以 $x \in V$, 从而存在 $j \leqslant k$, 使得 $V = V_j$. 对任意的 $z \in B_V(y,1/m)$, 有

$$d_V(x,z) \leqslant d_V(x,y) + d_V(y,z) < \frac{2}{m} < \varepsilon_j,$$

即 $B_V(y,1/m) \subset B_V(x,\varepsilon_j)$. 于是

$$x \in B \subset B_V(y,1/m) \subset B_V(x,\varepsilon_j) = B_{V_j}(x,\varepsilon_j) \subset U.$$

故 $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{B}_m$ 是 X 的 σ 局部有限的基. □

推论 4.6.1 设 X 是正则的 Lindelöf 空间. 如果 X 是局部可度量化的, 则 X 是可分的度量化空间.

证明 由推论 4.5.2, X 是仿紧空间, 从而 X 是可度量化空间. 再由定理 3.8.3, X 是可分的度量化空间. □

例 4.6.1 良序空间 $[0,\omega_1)$ 是局部可度量化的非仿紧空间.

对任意的 $x \in [0, \omega_1)$, x 的开邻域 $[0, x]$ 是第一可数的可数空间, 所以 $[0, x]$ 具有可数基, 从而是可度量化的 (由定理 3.4.7 和定理 3.8.5). 于是 $[0, \omega_1)$ 是局部可度量化的. 由例 4.1.1 和定理 4.1.3, $[0, \omega_1)$ 不是可度量化的. 再根据定理 4.6.2, $[0, \omega_1)$ 不是仿紧空间.

习 题 4.6

4.6.1 证明: 度量空间中的每个闭集是 G_δ 集.

4.6.2 利用定理 3.7.6 的证明方法, 直接证明: 具有 σ 局部有限基的正则空间是正规的.

4.6.3 设拓扑空间 X 的每个闭子集是 G_δ 集. 若 X 是正规空间, 则 X 的每个子空间是正规的.

4.6.4 证明: 良序空间 $[0, \omega_1)$ 中的全体孤立点之集不是 $[0, \omega_1)$ 的 F_σ 集.

4.6.5 找一个非离散的度量空间, 它没有可数基.

第 5 章　离散拓扑动力系统

动力系统的研究, 起源于常微分方程定性理论的探索. 考虑定义于 $\mathbb{R}^m$ 上的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varPhi(x)$$

和初始条件 $x(0) = x_0$. 如果 $\varPhi(x)$ 满足一定的条件, 那么解 $\varphi(t, x_0)$ 总是存在的, 并且可以对一切 $t \in \mathbb{R}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^m$ 有定义. 把 x_0 写作 x, 解 $\varphi(t, x)$ 应满足以下关系:

(1) $\varphi(0, x) = x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^m$;

(2) $\varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x)),\ \ \forall\ s, t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^m$.

满足条件 (1) 和 (2) 的映射 $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 称为 $\mathbb{R}^m$ 上的*动力系统*或*流*. 对给定的 $x \in \mathbb{R}^m$, 点集 $\{\varphi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$ 称为动力系统 φ 经过点 x 的*轨道*. 19 世纪末开始, J. H. Poincaré (法, 1854~1912) 等就对这种系统的轨道结构展开研究.

受上述研究的启发, 人们考虑更一般的连续映射 $\varphi : \mathbb{R} \times X \to X$, 其中 X 是拓扑空间. 称 φ 是空间 X 上的动力系统, 如果 φ 具有下列性质:

(3) $\varphi(0, x) = x,\ \forall\ x \in X$;

(4) $\varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x)),\ \ \forall\ s, t \in \mathbb{R},\ x \in X$.

20 世纪初, G. D. Birkhoff (美, 1884~1944) 等开展了拓扑动力系统一般理论的研究.

设 φ 是拓扑空间 X 上的*动力系统*, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, 由 $\varphi^n(x) = \varphi(n, x)$ 定义的连续映射 $\varphi^n : X \to X$ 应满足:

(5) $\varphi^0 = i_X$;

(6) $\varphi^{n+m} = \varphi^n \circ \varphi^m,\ \ \forall\ \ n, m \in \mathbb{Z}$.

由于 φ 具有逆映射 φ^{-1}, 因而 φ 是同胚. 一般地, 对任意的同胚 $f : X \to X$, 总能生成*双边序列* $\{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 其中定义 $f^0 = i_X,\ f^k = f^{k-1} \circ f,\ f^{-k} = (f^{-1})^k,\ \ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+$. 显然, 这双边序列满足:

(7) $f^0 = i_X$;

(8) $f^{n+m} = f^n \circ f^m,\ \ \forall\ n, m \in \mathbb{Z}$.

人们称这种由同胚通过迭代生成的双边序列为*离散动力系统*. 如果考虑连续映射 $f : X \to X$, 则可生成*单边序列* $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足相应的条件, 这种序列称为*离散半动力系统*. 它们提供了系统在未来一串离散时刻状态变化的趋势. 广义地说, 描述决定性系统的数学模型都可以称为*动力系统*. 但通常所谓的动力系统, 多指由映射

迭代生成的系统或常微系统. 由于 S. Smale (美, 1930～) 等的大力提倡, 自 20 世纪 60 年代以来, 对于离散 (半) 动力系统的研究迅速发展起来.

关于更一般的拓扑群上的动力系统, 读者可参考叶向东等的《拓扑动力系统概论》[6].

5.1 轨道与拓扑共轭

设 X 是拓扑空间, $f: X \to X$ 是连续映射. 这 f 常称为 X 上的**连续自映射**. 对每个 $x \in X$, 集合 $O_f(x) = \{f^n(x): n \in \mathbb{N}\}$ 称为 f 过点 x 的 (正半) **轨道**. 若 $f(x) = x$, 则 x 称为 f 的**不动点**. 若存在 $n \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $f^n(x) = x$, 则称 x 为 f 的**周期点**, 并把使得 $f^n(x) = x$ 成立的最小正整数 n 称为 x 的**周期**, x 称为 f 的 n **周期点**, 过周期点 x 的轨道 $O_f(x) = \{f^k(x): 0 \leqslant k < n\}$ 称为 f 的一条**周期轨道**或 n **周期轨道**. 分别记 f 的不动点的集合和周期点的集合为 $\mathrm{Fix}(f)$ 和 $P(f)$. 显然, $\mathrm{Fix}(f) \subset P(f)$.

对 $x \in X$, 集合

$$\omega(x, f) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} \overline{\{f^k(x): k \geqslant n\}}$$

称为轨道 $O_f(x)$ 的 ω **极限点集**. 显然, $\omega(x, f)$ 是 X 的闭子集; 如果 X 是紧空间, 则 $\omega(x, f) \neq \varnothing$ (见引理 4.2.1). 称 $\omega(f) = \cup\{\omega(x, f): x \in X\}$ 为 f 的 ω **极限点集**.

$x \in X$ 称为 f 的**回归点**, 若对 x 在 X 中的每个邻域 U, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^n(x) \in U$, 即 $x \in \overline{\{f^n(x): n \in \mathbb{Z}_+\}}$. f 的回归点的集合记为 $R(f)$. 显然, $P(f) \subset R(f)$.

$x \in X$ 称为 f 的**非游荡点**, 若对 x 在 X 中的每个邻域 U, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^{-n}(U) \cap U \neq \varnothing$. f 的非游荡点的集合记为 $\Omega(f)$. $X - \Omega(f)$ 中的点称为 f 的**游荡点**.

引理 5.1.1 若 f 是拓扑空间 X 上的连续自映射, 那么

(1) $\Omega(f)$ 是 X 的闭集且 $\omega(f) \cup R(f) \subset \Omega(f)$;

(2) $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$;

(3) 若 X 是第一可数空间, 则 $x \in \Omega(f)$ 当且仅当对 x 的每个邻域 U, 存在无限个正整数 k 使得 $f^{-k}(U) \cap U \neq \varnothing$.

证明 (1) 若 x 是 f 的游荡点, 则存在 x 的开邻域 U 和 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^{-n}(U) \cap U = \varnothing$, 所以 U 中的点都是 f 的游荡点. 这表明 $\Omega(f)$ 是 X 的闭集. 若 $x \in R(f)$, 则对 x 的任一邻域 U, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^n(x) \in U$, 于是 $x \in f^{-n}(U) \cap U$, 从而 $x \in \Omega(f)$, 因此 $R(f) \subset \Omega(f)$. 若 $x \in X$ 且 $y \in \omega(x, f)$, 则对 y 的任一邻域

V, 存在正整数 $m > k$ 使得 $f^m(x)$, $f^k(x) \in V$, 于是 $f^{-m}(V) \cap f^{-k}(V) \neq \varnothing$, 即 $f^{-(m-k)}(V) \cap V \neq \varnothing$, 所以 $y \in \Omega(f)$.

(2) 若 $x \in \Omega(f)$ 且 U 是 $f(x)$ 的邻域, 则 $f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^{-n}(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \varnothing$, 那么 $f^{-n}(U) \cap U \neq \varnothing$, 所以 $f(x) \in \Omega(f)$. 故 $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$.

(3) 设 X 是第一可数空间, U 是 x 的邻域且 $n \in \mathbb{Z}_+$. 如果 $x \in P(f)$, 则存在 $k > n$ 使得 $f^k(x) = x$, 于是 $x \in f^{-k}(U) \cap U$. 如果 $x \notin P(f)$, 则存在 x 的邻域 $V \subset U$ 使得, $f^{-i}(V) \cap V = \varnothing$, $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n$. 否则, 记 x 的含于 U 内的可数递减的局部基为 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$, 则对每个 $j \in \mathbb{Z}_+$, 存在正整数 $i_j \leqslant n$ 和 $x_j \in f^{-i_j}(V_j) \cap V_j$, 从而存在固定的 $i_0 \leqslant n$ 和子序列 $\{j_m\}$ 使得每个 $i_{j_m} = i_0$. 这时, $x_{j_m} \in V_{j_m}$ 且 $f^{i_0}(x_{j_m}) \in V_{j_m}$. 由于 $\{V_{j_m}\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$ 是 x 在 X 中的局部基, $f^{i_0}(x) = x$, 矛盾. 现在, 设 $x \in \Omega(f)$ 且 x 的邻域 $V \subset U$, 使得对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $f^{-i}(V) \cap V = \varnothing$, 则存在正整数 k 使得 $f^{-k}(V) \cap V \neq \varnothing$, 从而 $k > n$ 且 $f^{-k}(U) \cap U \neq \varnothing$. □

如果 X 的子集 Λ 满足 $f(\Lambda) \subset \Lambda$, 则称 Λ 是 f 的*不变集*. 由引理 5.1.1, $\Omega(f)$ 是 f 的不变集. 易验证, $O_f(x)$, $\omega(x, f)$, $\mathrm{Fix}(f)$, $P(f)$ 都是 f 的不变集. 周期轨道的任何非空真子集都不是不变集, 即周期轨道是 f 的极小不变集.

例 5.1.1　对单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 赋予通常的弧长度量 d, 定义 $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 为 $f(z) = z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}$, 其中 θ 是常数. 同胚映射 f 称为*旋转映射*.

对每个 $z \in \mathbb{S}^1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f^n(z) = z\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\theta}$. 由此, $f^n(z) = z$ 当且仅当存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $\theta = k/n$.

当 θ 是有理数时, f 的每一条轨道是周期轨道, 即 $P(f) = \mathbb{S}^1$. 当 θ 是无理数时, f 的每一条轨道是 $\mathbb{S}^1$ 的稠密子集. 事实上, 对每个 $z \in \mathbb{S}^1$, 由于 θ 是无理数, 所以 $O_f(z)$ 中的点是两两互不相同的. 对 $\mathbb{S}^1$ 的任一开弧 A, 存在 $j \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $2\pi/j < \mathrm{diam}(A)$. 令 $z_k = f^k(z)$, $0 \leqslant k \leqslant j$, 则存在不同的 $n, m \in \{0, 1, \cdots, j\}$ 使得 $d(z_n, z_m) < 2\pi/j$. 不妨设 $n > m$, 记 $n_0 = n - m$, 则对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 有

$$d(f^{(k+1)n_0}(z_0), f^{kn_0}(z_0)) = d(z_n, z_m) < \mathrm{diam}(A).$$

因而, 存在 $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^{k_0 n_0}(z_0) \in A$, 即 $O_f(z)$ 是 $\mathbb{S}^1$ 的稠密子集.

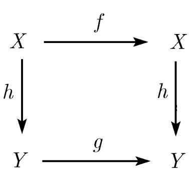


图 5.1.1

定义 5.1.1　设 X, Y 都是拓扑空间, $f: X \to X$ 和 $g: Y \to Y$ 都是连续映射. 如果存在同胚 $h: X \to Y$ 使得 $h \circ f = g \circ h$, 则称 f 与 g 是*拓扑共轭的*. h 称为 f 到 g 的*拓扑共轭*, 见图 5.1.1.

显然, 拓扑共轭是等价关系. 如果 h 是 f 到 g 的拓扑共轭, 那么对每个 $x \in$

X, $n\in\mathbb{N}$, 有 $h(f^n(x))=g^n(h(x))$, 这表明 $h(O_f(x))=O_g(h(x))$. 易验证,

$$h(\omega(x,f))=\omega(h(x),g),\quad h(\mathrm{Fix}(f))=\mathrm{Fix}(g),\quad h(P(f))=P(g),$$
$$h(R(f))=R(g),\quad h(\Omega(f))=\Omega(g),\quad\cdots.$$

涉及动力系统研究中所感兴趣的许多性质, f 与 g 都是一样的, 所以在动力系统的研究中, 相互共轭的两个连续自映射可看成是相同的. 因此, 当研究连续自映射的动力系统性质时, 可用与它拓扑共轭的较简单的连续自映射来代替它.

习 题 5.1

5.1.1 如果 Λ 是 f 的不变集, 则 $\overline{\Lambda}$ 也是 f 的不变集.

5.1.2 f 的周期轨道是 f 的极小不变集.

5.1.3 验证: 拓扑共轭是等价关系.

5.2 周 期 3

$\mathbb{R}$ 的闭区间称为线段. 在动力系统的讨论中, 最简单的问题也许是: 线段上的连续自映射有怎样的周期轨道? 设 f 是线段 I 上的连续自映射. f 的图像和直线 $y=x$ 的交点的横坐标是 f 的 1 周期点 (不动点). 如果 $\{x_1,x_2\}$ 是 f 的 2 周期轨道, 则关于直线 $y=x$ 对称的两点 $(x_1,x_2),(x_2,x_1)$ 都在函数的图像上. 周期超过 2 的轨道就不具有如此明显的几何直观. 图 5.2.1 画出了 $[0,1]$ 上的连续函数 f 的图像. 显然, f 有不动点 x_0, 2 周期轨道 $\{x_1,x_2\}$, 还有 3 周期轨道 $\{0,1/2,1\}$. f 还有没有别的周期轨道? 例如, f 有没有 7 周期轨道? 有没有 2008 周期轨道? 这是不容易看出来的. 正因为如此, 虽然人们研究线段上的自映射已有久远的历史, 但是一直到 1964 年, A. N. Sarkovskii 才发现, 这种映射的周期点的周期呈现出令人惊异的规律性. Sarkovskii 定理长期不为西方学者所知, 1975 年, T. Y. Li 和 J. A. Yorke 才重新证明了该定理的一个特殊情形: 如果线段上的连续自映射具有 3 周期点, 则它就具有一切周期的周期点. 本节先介绍这一较简单情形的证明.

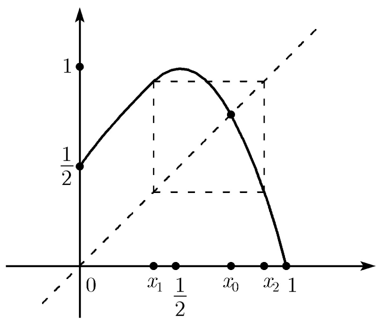


图 5.2.1

定义 5.2.1 设 f 是线段 I 上的连续自映射. 如果存在 I 的子线段 K,L 使得 $L\subset f(K)$, 则称 K 在 f 下覆盖 L, 简称 K *覆盖* L , 记为 $K\xrightarrow{f}L$ 或简记为 $K\to L$. 如果 $K\to K$, 记为 $\hookrightarrow K$.

为了叙述的简洁, 本节及 5.3 节中, 均设 f 是线段 I 上的连续自映射, J, K, L (可能含有下标) 等表示 I 的子线段. 由连续函数的介值定理和最值定理, 若 J 是 I 的子线段, 则 $f(J)$ 也是线段.

引理 5.2.1　若 $K \to L$, 则存在 K 的子线段 J 满足: $f(J) = L$ 且如果 J_1 是 J 的真子线段, 那么 $f(J_1) \neq L$.

证明　记 $L = [\alpha, \beta]$. 因为 $L \subset f(K)$, 存在 $a, b \in K$ 使得 $f(a) = \alpha,\ f(b) = \beta$. 不妨设 $a < b$, 记

$$c = \sup\{x \in K : x < b, f(x) = \alpha\}, \quad d = \inf\{x \in K : x > c, f(x) = \beta\},$$

则 $J = [c, d]$ 满足要求. □

引理 5.2.2　若 $K \to K$, 则 f 在 K 中有不动点.

证明　设 $K = [a, b]$, 则 $[a, b] \subset f([a, b])$, 那么存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得

$$f(x_1) \leqslant a \leqslant x_1, \quad f(x_2) \geqslant b \geqslant x_2.$$

即连续函数 $f(x) - x$ 在 x_1, x_2 的值若都不是零, 则异号, 所以存在 $x_0 \in K$ 使得 $f(x_0) = x_0$. □

下述引理是寻求周期点或周期轨道的一种基本方法.

引理 5.2.3　如果 $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_n \to I_1$, 则存在 $x \in I_1$ 使得 $f^n(x) = x$, 且对 $j = 1, 2, \cdots, n-1$, 有 $f^j(x) \in I_{j+1}$.

证明　由引理 5.2.1, 对 $j = 1, 2, \cdots, n$, 存在 $J_j \subset I_j$ 使得

$$f(J_n) = I_1 \text{ 且 } f(J_j) = J_{j+1},\ \forall\, j = 1, 2, \cdots, n-1.$$

因为 $J_1 \stackrel{f^n}{\to} J_1$, 由引理 5.2.2, 存在 $x \in J_1 \subset I_1$ 使得 $f^n(x) = x$, 从而当 $j = 1, 2, \cdots, n-1$ 时, 有 $f^j(x) \in J_{j+1} \subset I_{j+1}$. □

引理 5.2.4　若 $x \in I$, 则

(1) $f^m(x) = x$ 当且仅当 x 的周期 n 能整除 m;

(2) 如果 x 是 f 的 n 周期点, m 与 n 互素, 则 x 是 f^m 的 n 周期点.

证明　(1) 若 x 的周期 n 能整除 m, 记 $m = nd$, 则 $f^m(x) = (f^n)^d(x) = x$. 反之, 设 $f^m(x) = x$ 且 x 是 f 的 n 周期点. 那么 $n \leqslant m$, 记 $m = nq + r$, 其中 $q \in \mathbb{Z}_+$ 且 $0 \leqslant r < n$, 于是 $x = f^m(x) = f^r(f^{nq}(x)) = f^r(x)$, 从而 $r = 0$, 所以 n 整除 m.

(2) 显然, $(f^m)^n(x) = f^{mn}(x) = x$. 若 x 是 f^m 的 k 周期点, 由 (1), 则 k 整除 n. 又由于 $f^{km}(x) = x$, 于是 n 整除 mk, 而 m 与 n 互素, 所以 n 整除 k. 因此, $n = k$. □

下面介绍本节的主要定理. 记 f 的周期的集合为 $\mathrm{PP}(f)$.

定理 5.2.1 (Li-Yorke 定理, 1975) 设 f 是线段 I 的连续自映射. 若 $3\in \mathrm{PP}(f)$, 则 $\mathbb{Z}_+=\mathrm{PP}(f)$.

证明 设 $x_0<x_1<x_2$ 是 f 在 I 的一条 3 周期轨道, 则 $f(x_1)=x_0$ 或 $f(x_1)=x_2$. 不妨设 $f(x_1)=x_2$, 则必有 $f(x_0)=x_1$ 且 $f(x_2)=x_0$. 记 $K=[x_0,x_1], J=[x_1,x_2]$, 则有 $\hookrightarrow J\rightleftarrows K$. 对任意的 $m\in\mathbb{Z}_+-\{3\}$, 由引理 5.2.2, 不妨设 $m\geqslant 2$, 考虑 f 的覆盖关系:

$$\underbrace{J\to J\to\cdots\to J}_{m-1}\to K\to J.$$

由引理 5.2.3, 存在 $y\in J$ 使得 $f^m(y)=y$, $f^{m-1}(y)\in K$ 且对 $j=1,2,\cdots,m-2$ 有 $f^j(y)\in J$. 我们断言: $y,f(y),\cdots,f^{m-1}(y)$ 是两两互不相同的. 若不然, 则 $f^{m-1}(y)\in\{y,f(y),\cdots,f^{m-2}(y)\}$, 因而 $f^{m-1}(y)\in J\cap K=\{x_1\}$, 故 $y=f^m(y)=f(x_1)=x_2$, 所以 $x_0=f(y)\in J$, 矛盾. 从而, $m\in\mathrm{PP}(f)$. □

定理 5.2.2 (1) 若 $m\in\mathrm{PP}(f)-\{1\}$, 则 $2\in\mathrm{PP}(f)$.

(2) 若 $2^n\in\mathrm{PP}(f)$, 则 $2^{n-1}\in\mathrm{PP}(f)$.

证明 (1) 不妨设 $m=\min(\mathrm{PP}(f)-\{1,2\})$. 把 f 的一条 m 周期轨道中的点按从小到大的顺序排列为 $x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}$. 对 $j=1,2,\cdots,m-1$, 记 $I_j=[x_{j-1},x_j]$, 由于 $f(I_j)\neq I_j$, 于是存在 $j'\leqslant m-1$ 使得 $I_j\to I_{j'}\neq I_j$, 从而在 $m-1$ 条线段 I_j $(j\leqslant m-1)$ 中必有 p $(1<p\leqslant m-1)$ 条两两不同的线段 I_{j_k} $(1\leqslant k\leqslant p)$, 使得

$$I_{j_1}\to I_{j_2}\to\cdots\to I_{j_p}\to I_{j_1}.$$

由引理 5.2.3, 存在 $y\in I_{j_1}$ 使得 $f^p(y)=y$, 所以 f 有 q 周期点且 $1<q\leqslant m-1$. 由 m 的选取, $q=2$.

(2) 若 $n=1$, 设 $\{x_0,x_1\}$ 是 f 的一条 2 周期轨道. 记 J 为以 x_0,x_1 为端点的线段, 则 $J\to J$, 于是 f 在 J 中有不动点. 若 $n>1$, 则 $f^{2^{n-2}}$ 有 4 周期点, 那么 $f^{2^{n-2}}$ 有 2 周期点, 即 f 有 2^{n-1} 周期点. □

本节最后给出例子说明, 即使很简单的函数, 其周期点之集也可以有相当复杂的结构. 记 $\mathbb{I}=[0,1]$.

例 5.2.1 函数 $f:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ 2(1-x), & 1/2<x\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $PP(f)=\mathbb{Z}_+$, $\overline{P(f)}=\overline{\mathbb{I}-P(f)}=\mathbb{I}$.

事实上, 取定 $x_0=6/7\in\mathbb{I}$, 那么 $f^3(x_0)=f^2(2/7)=f(4/7)=6/7$, 所以 f 有 3 周期点, 由定理 5.2.1, $\mathrm{PP}(f)=\mathbb{Z}_+$.

注意到, 每个 $x \in \mathbb{I}$ 可表示为 2 进制小数

$$x = 0.a_1 a_2 \cdots a_k \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k \in \{0, 1\}.$$

若记 $\bar{a}_k = 1 - a_k$, 则

$$f(x) = \begin{cases} 0.a_2 a_3 \cdots a_k \cdots, & a_1 = 0, \\ 0.\bar{a}_2 \bar{a}_3 \cdots \bar{a}_k \cdots, & a_1 = 1. \end{cases}$$

其次, 证明 $\overline{P(f)} = \mathbb{I}$. 对每个 $x \in \mathbb{I}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, 以 2 进制记 $x = 0.a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$, 令

$$\tilde{x}_0 = 0.a_1 a_2 \cdots a_m a_1 a_2 \cdots a_m a_1 a_2 \cdots a_m \cdots,$$
$$\tilde{x}_1 = 0.a_1 a_2 \cdots a_m \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_m a_1 a_2 \cdots a_m \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_m \cdots,$$

则 $\tilde{x}_0$ 和 $\tilde{x}_1$ 中至少有一个是 f 的周期不大于 m 的周期点, 且 $|x - \tilde{x}_0| \leqslant 1/2^m$, $|x - \tilde{x}_1| \leqslant 1/2^m$. 于是, f 的周期点集在 $\mathbb{I}$ 中稠密.

再次, 证明 $\overline{\mathbb{I} - P(f)} = \mathbb{I}$. 如果 x 是 $(0, 1)$ 中的 2 等分点, 则

$$x = 0.a_1 a_2 \cdots a_k 000 \cdots \ \text{或}\ x = 0.a_1 a_2 \cdots a_k 111 \cdots,$$

那么 $f^{k+1}(x) = 0$, 可见 x 一定不是 f 的周期点. 从而, f 的非周期点集在 $\mathbb{I}$ 中稠密.

习　题　5.2

5.2.1　设 a 是 f 的 p 周期点. 若 $g = f^q$ 且 p 与 q 的最大公约数是 d, 则 a 是 g 的 p/d 周期点.

5.2.2　设 a 既是 f^q 的 m 周期点, 又是 f 的 n 周期点. 如果 n 与 q 的最大公约数是 d, 则 $n = dm$.

5.2.3　在定理 5.2.1 的论证中, 假设 $f(x_1) = x_0$, 证明定理 5.2.1.

5.3　Sarkovskii 定理

把关于 f 的覆盖关系 $\hookrightarrow I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1$ 按箭头的顺序列为多边形状的图示, 称为 (圈长 k 的) f *覆盖图*, 见图 5.3.1.

先证明以下构造覆盖图的一条技术性引理.

引理 5.3.1 (*覆盖引理*)　设 f 是线段 I 上的连续自映射, m 是 f 的大于 1 的最小奇周期. 若 x_0 是 f 的 m 周期点, 则线段 $J = [\min O_f(x_0), \max O_f(x_0)]$ 被 $O_f(x_0)$

的 m 个点分拆为 $m-1$ 个两两无公共内点的子线段 $\{I_j\}_{j\leqslant m-1}$, 使得有 f 覆盖图 (图 5.3.2)

$$\hookrightarrow I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{m-1} \to I_1, \text{ 且 } I_{m-1} \to I_{2i+1} (\forall\ 1 \leqslant 2i+1 \leqslant m-2).$$

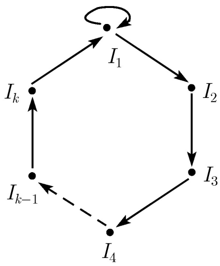


图 5.3.1

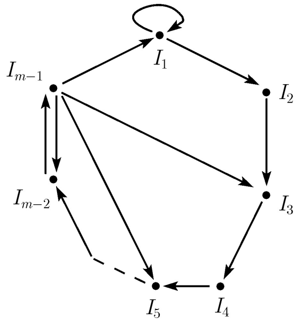


图 5.3.2

证明 记 $O = O_f(x_0)$, $\mathscr{L}$ 是 O 的任意两相邻顶点构成的 $m-1$ 条子线段的集合. 分 6 步完成引理的证明.

(1) 存在 $I_1 \in \mathscr{L}$ 使得 $I_1 \to I_1$.

记 $\alpha = \min O$, $\beta = \max O$, 则 $f(\alpha) > \alpha$ 且 $f(\beta) < \beta$, 存在

$$a = \max\{y \in O : f(y) > y\} < \beta,$$

于是有 $b \in O$ 使得 $I_1 = [a, b] \in \mathscr{L}$. 显然, $f(a) \geqslant b$ 且 $f(b) \leqslant a$, 即 $I_1 \to I_1$.

(2) 归纳定义子线段 J_j $(j \leqslant k)$, 其中 k 是某个正整数, 使得每个 J_j 的端点在 O 中且

$$I_1 = J_1 \overset{\subsetneq}{\to} J_2 \overset{\subsetneq}{\to} \cdots \overset{\subsetneq}{\to} J_k = J.$$

置

$$J_1 = I_1, \quad J_{j+1} = [\min(f(J_j) \cap O),\ \max(f(J_j) \cap O)], \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

显然, $J_j \to J_{j+1}$. 尚需验证每个 $J_j \subset J_{j+1}$. 由于 $J_1 \subset f(J_1)$, 所以

$$J_1 \subset [\min(f(J_1) \cap O),\ \max(f(J_1) \cap O)] = J_2.$$

设已证 $J_{j-1} \subset J_j$, 则

$$J_j \subset [\min(f(J_j) \cap O),\ \max(f(J_j) \cap O)] = J_{j+1}.$$

因为周期轨道是 f 的极小不变集, 只要 $J_j \not\supset O$, $f(J_j)$ 中就必含有 O 中不在 J_j 中的点, 所以 $J_j \neq J_{j+1}$. 因为 O 是有限集, 所以存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $J_k = J$.

(3) 存在 $I_k \in \mathscr{L}$ 使得 $I_1 \neq I_k \to I_1$.

对 $I_1 = [a, b]$, 置

$$A = \{z \in O : z \leqslant a\}, \quad B = \{z \in O : z \geqslant b\},$$

则 $A \cup B = O$ 中有 m 个元, 于是元素个数 $|A| \neq |B|$. 不妨设 $|A| > |B|$. 由于 $f|_O$ 是单射, 所以 $f(A) \not\subset B$, 于是存在 $z \in A$ 使得 $f(z) \in A$. 让 $c = \max\{z \in A : f(z) \in A\}$, 则 $c < a$, 因而存在线段 $I_k = [c, d] \in \mathscr{L}$, 满足 $c < d \leqslant a$, $f(c) \leqslant a$, $f(d) \geqslant b$, 即 $I_1 \neq I_k \to I_1$.

从而

$$I_1 \to J_2 \to J_3 \to \cdots \to J_{k-1} \to I_k \to I_1.$$

(4) 若线段 K 的端点在 O 中且 $K \to L \in \mathscr{L}$, 则存在 $M \in \mathscr{L}$ 使得 $M \subset K$ 且 $M \to L$.

由引理 5.2.1, 存在线段 $K_1 = [\gamma, \delta] \subset K$, 使得 $f(K_1) = L$, 且 K_1 是具有此性质的极小者, 于是 $(\gamma, \delta) \cap O = \varnothing$, 因而存在唯一的 $M \in \mathscr{L}$, 满足 $(\gamma, \delta) \subset M \subset K$, $M \to f(K_1) = L$.

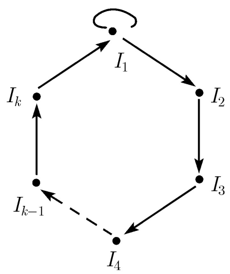


图 5.3.3

结合 (2) ∼ (4), 对 $j = 2, 3, \cdots, k-1$, 存在 J_j 的子集 $I_j \in \mathscr{L}$ 使得

$$\hookrightarrow I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{k-1} \to I_k \to I_1.$$

如图 5.3.3. 在此 f 覆盖图中, (必要时) 通过圈长的进一步减少, 设 k 是覆盖图的最小圈长.

(5) $k = m - 1$.

由 (2) 和 (3), $1 < k \leqslant m-1$. 如果 $k \leqslant m-2$, 则依 k 为奇数或偶数, 分别考虑覆盖关系

$$I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1 \text{ 或 } I_1 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1.$$

由引理 5.2.3, 存在 $y \in I_1$ 和奇数 n (k 或 $k+1$) $\leqslant m-2$ 使得 $f^n(y) = y$, 于是 y 的周期小于 n, 存在 $j < k$ 使得 $f^{n-1}(y) \in I_k \cap I_j \subset O$, 所以 $y = f^n(y) \in O$, 与假设矛盾, 故 $k = m-1$.

(6) $\mathscr{L}$ 中的线段在数轴上按从小到大的顺序排列为

$$I_{m-1}, I_{m-3}, \cdots, I_2, I_1, I_3, \cdots, I_{m-2} \text{ 或 } I_{m-2}, I_{m-4}, \cdots, I_3, I_1, I_2, \cdots, I_{m-1}.$$

对 $j = 0, 1, \cdots, m-1$, 记 $a_j = f^j(a)$. 由圈长 k 的最小性, 在 $\mathscr{L}$ 中 I_1 只能覆盖 I_1 和 I_2, 于是关系 $f(a) \geqslant b$, $f(b) \leqslant a$ 中恰有一为等式. 如果 $f(a) = b$, 则 $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = f(b) < a$ 与 a 相邻, 所以 $I_1 = [a_0, a_1]$, $I_2 = [a_2, a_0]$. 因为

$f(I_2) \not\supset I_1$ 且 $f(a_0)=a_1$, 所以 $a_3=f(a_2)>a_1$. 又因为在 $\mathscr{L}$ 中 I_2 只能覆盖 I_3, 所以 a_3 与 a_1 相邻, 即 $I_3=[a_1,a_3]$.

通过有限归纳法, 对正整数 i, I_{2i-1} 的右端点在 f 的值是 I_{2i} 的左端点 ($i \leqslant \frac{m-1}{2}$), 且 I_{2i} 的左端点在 f 的值是 I_{2i+1} 的右端点 ($i \leqslant \frac{m-3}{2}$), 于是 $\mathscr{L}$ 中线段在数轴上排列为

$$I_{m-1}, I_{m-3}, \cdots, I_2, I_1, I_3, \cdots, I_{m-2}.$$

如果 $f(b)=a$, 则 $\mathscr{L}$ 中线段在数轴上排列为

$$I_{m-2}, I_{m-4}, \cdots, I_3, I_1, I_2, \cdots, I_{m-1}.$$

这时, I_{m-1} 的两端点是 a_{m-1}, a_{m-3} 且 $f(a_{m-1})=a_0$, $f(a_{m-3})=a_{m-2}$, 于是

$$f(I_{m-1}) \supset I_1 \cup I_3 \cup \cdots \cup I_{m-2}.$$

由此, 得到了所需的 f 覆盖图, 见图 5.3.2. □

如果记覆盖引理中的 $m=2n+1$, 则 O 中点由小到大可排为下列两种顺序之一, 见图 5.3.4:

$$a_{2n} < a_{2n-2} < \cdots < a_2 < a_0 < a_1 < a_3 < \cdots < a_{2n-1},$$

$$a_{2n-1} < a_{2n-3} < \cdots < a_1 < a_0 < a_2 < a_4 < \cdots < a_{2n}.$$

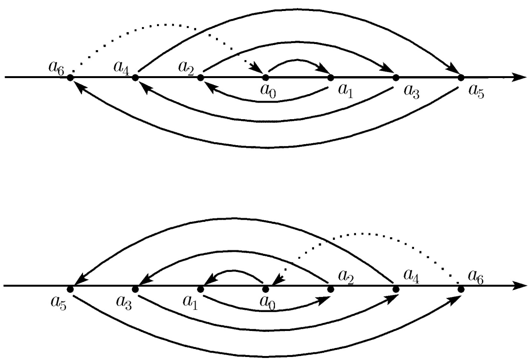


图 5.3.4

推论 5.3.1 若 f 有 $2n+1$ 周期轨道 (n 是某一正整数), 则对任意 $k>2n+1$, f 有 k 周期轨道.

证明 不妨设 $2n+1$ 是 f 的大于 1 的最小奇周期. 对 $k>2n+1$, 由覆盖引理, 有

$$\underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{k-(2n-1)} \to I_2 \to \cdots \to I_{2n} \to I_1,$$

由引理 5.2.3, f 有 k 周期轨道. □

推论 5.3.2 若 f 有 $2n+1$ 周期轨道 (n 是某一正整数), 则对任意正整数 k, f 有 $2k$ 周期轨道.

证明 由推论 5.3.1, 只要证明 $k \leqslant n$ 的情形. 对 $k=1,2,\cdots,n$, 有

$$I_{2k-1} \to I_{2k} \to I_{2k+1} \to \cdots \to I_{2n} \to I_{2k-1}.$$

由引理 5.2.3, f 有 $2(n-k)+2$ 周期轨道. 当 k 从 n 变到 1 时, 得到 f 的 $2,4,\cdots,2n$ 周期轨道. □

在介绍 Sarkovskii 定理之前, 先介绍 Sarkovskii 序. 把 $\mathbb{Z}_+$ 按下述方式重新排序: 先由小到大排列 (下同) 所有大于 1 的奇数 $3,5,7,\cdots$; 接着排列所有大于 1 的奇数的 2 倍数

$$3\times 2,\ 5\times 2,\ 7\times 2,\ \cdots;$$

再接着排列所有大于 1 的奇数的 2^2 倍数

$$3\times 2^2,\ 5\times 2^2,\ 7\times 2^2,\ \cdots;$$

依此方式继续排列下去, 最后再按降幂顺序排列所有 2 的方幂

$$\cdots,2^4,2^3,2^2,2,1.$$

用 $\lhd$ 表示这种顺序, 即

$$\begin{aligned}&3\lhd 5\lhd 7\lhd\cdots\lhd 2n+1\lhd\cdots\lhd 3\times 2\lhd 5\times 2\lhd 7\times 2\lhd\cdots\\&\lhd 3\times 2^2\lhd 5\times 2^2\lhd 7\times 2^2\lhd\cdots\lhd 2^3\lhd 2^2\lhd 2\lhd 1,\end{aligned}$$

称为 Sarkovskii 序.

引理 5.3.2 设 r 是大于 1 的奇数, $2^i r\in \mathrm{PP}(f)$ 且对 $q\lhd 2^i r$, f 无 q 周期轨道. 令 $g=f^{2^i}$. 如果 $n>1$, 则 $x\in I$ 是 f 的 $2^i n$ 周期点当且仅当 x 是 g 的 n 周期点.

证明 若 x 是 f 的 $2^i n$ 周期点, 则 $g^n(x)=f^{2^i n}(x)=x$, 且当 $k<n$ 时 $g^k(x)=f^{2^i k}(x)\neq x$, 所以 x 是 g 的 n 周期点. 反之, 若 x 是 g 的 n 周期点, 则 $f^{2^i n}(x)=g^n(x)=x$. 设 p 是 f 在 x 的周期, 由引理 5.2.4, p 整除 $2^i n$. 记 $p=2^j k$, 其中 k 是奇数. 如果 $j<i$, 则 $k=1$, 于是 x 是 f 的 2^j 周期点, 从而 x 是 g 的不动点, 矛盾. 由此, $j\geqslant i$, 那么 $2^{j-i}k$ 整除 n. 因为 $g^{2^{j-i}k}(x)=f^{2^j k}(x)=x$, 所以 n 整除 $2^{j-i}k$. 因此, $n=2^{j-i}k$, 即 x 是 f 的 $2^i n$ 周期点. □

有了上述准备, 我们可轻松地证明本章最重要的定理.

定理 5.3.1 (Sarkovskii 定理, 1964) 设 $m\in\mathrm{PP}(f)$. 若 $m\lhd n$, 则 $n\in\mathrm{PP}(f)$.

证明 由推论 5.3.1、推论 5.3.2 和定理 5.2.2, 不妨设 $m=2^i r$, $i\geqslant 1$ 且 r 是大于 1 的奇数. 再设对 $q\lhd 2^i r$, f 无 q 周期轨道. 令 $g=f^{2^i}$, 由引理 5.3.2, g 以 r 为最

小奇周期, 再由推论 5.3.1 和推论 5.3.2, $\mathrm{PP}(g)$ 含有所有大于 r 的奇数 s 和所有的偶数 t, 又由引理 5.3.2, $\mathrm{PP}(f)$ 应含有 $2^i s$ 和 $2^i t$. 因此, 只要 $m \lhd n$, 则 $n \in \mathrm{PP}(f)$. □

Li-Yorke 定理是 Sarkovskii 定理中 $m=3$ 的特例. 定理 5.3.1 的证明虽颇复杂, 但并不高深, 连微分、积分等起码的高等数学内容都没用上, 而仅仅作具体的组合排序的讨论.

动力系统的核心问题是结构稳定性. 对于周期轨道, Sarkovskii 定理说明, 如果连续自映射 f 有 m 周期点, 则对 $m \lhd n$, f 有 n 周期点. 若把 f 扰动一下, 变成和 f 很接近的连续自映射 g, g 是否也有 n 周期点? 1981 年, L. Block 证明了 Sarkovskii 周期轨道的稳定性定理.

定理 5.3.2　设 f 是线段 I 上的连续自映射. 如果 f 有 m 周期点, 则存在正数 ε 满足: 若 g 是 I 上的连续自映射且 $\sup\limits_{x\in I}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$, 则当 $m \lhd n$ 时, g 有 n 周期点.

限于篇幅, 我们不在这里证明 Block 的定理, 有兴趣的读者可见文献 [7] 的定理 12.1.

习　题　5.3

5.3.1　设 f 是线段 I 上的连续自映射. 若 $\mathrm{PP}(f)$ 有上界, 则 $P(f)$ 是 I 的闭集.

5.3.2　旋转映射 $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 定义为 $f(z)=z\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}$. 证明: $\mathrm{PP}(f)=\{3\}$.

5.3.3　在覆盖引理论证的 (6) 中, 假设 $f(b)=a$, 证明线段的排列顺序.

5.4　符号动力系统

本节介绍的符号动力系统是动力系统研究中揭示在某个映射迭代下会出现浑沌现象的有力工具.

定义 5.4.1　记 $\varSigma_2$ 为由两个符号 0 与 1 所构成的无穷序列的全体组成的集合, 即

$$\varSigma_2=\{s=(s_0s_1s_2\cdots):s_j=0,1\},$$

则称 $\varSigma_2$ 为两个符号 $\{0,1\}$ 上的序列集 .

如无特别说明, $s\in\varSigma_2$ 指 $s=(s_0s_1s_2\cdots)$, 其中每个 $s_j\in\{0,1\}$. $\varSigma_2$ 中的两元相等指序列中对应项的符号相同. 在 $\varSigma_2$ 上引进如下度量. 对 $s,t\in\varSigma_2$, 定义

$$d(s,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|s_i-t_i|}{2^i}.$$

易验证, (Σ_2, d) 是度量空间, 称之为符号空间. 注意到, (Σ_2, d) 的下述性质：设 $s, t \in \Sigma_2$,

(1) 若 s, t 的前 $n+1$ 项相同, 则 $d(s,t) \leqslant 1/2^n$;

(2) 若 $d(s,t) < 1/2^n$, 则 s, t 的前 $n+1$ 项相同.

在分析 Σ_2 的动力学性质之前, 先讨论 Σ_2 的拓扑性质. 设 X 是拓扑空间, 如果 X 中不存在孤立点, 则称 X 是自密的; 如果 X 的每个连通分支是单点集, 则称 X 是全不连通的.

定理 5.4.1　(Σ_2, d) 是紧, 自密和全不连通的空间.

证明　因为 (Σ_2, d) 是度量空间, 为证它是紧空间, 只需证明 Σ_2 中的每个序列有聚点 (见定理 4.1.3). 对 Σ_2 中的序列 $\{x^{(n)}\}$, 记 $x^{(n)} = (x_0^n x_1^n x_2^n \cdots)$. 对固定的 $k \in \mathbb{N}$, $\{x_k^n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 中含有无限项的 0 或 1. 因而, 存在无限的 $Z_0 \subset \mathbb{Z}_+$, 当 $n \in Z_0$ 时, x_0^n 全为 $s_0 \in \{0,1\}$. 又存在无限的 $Z_1 \subset Z_0$, 当 $n \in Z_1$ 时, x_1^n 全为 $s_1 \in \{0,1\}$. 一般地, 存在无限的 $Z_k \subset Z_{k-1}$, 当 $n \in Z_k$ 时, x_k^n 全为 $s_k \in \{0,1\}$. 记 $s = (s_0 s_1 s_2 \cdots) \in \Sigma_2$, 则 s 是序列 $\{x^{(n)}\}$ 的聚点. 事实上, 对每个 $k \in \mathbb{N}$, 取定 $n_k \in Z_k$ 使得 $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$, 则 $x^{(n_i)}$ 与 s 的前 $i+1$ 项相同, 所以 $d(x^{(n_i)}, s) \leqslant 1/2^i$, 从而 $x^{(n_i)} \to s$. 故 Σ_2 是紧空间.

对每个 $s \in \Sigma_2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 记

$$x_n = (s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_n^* s_{n+1} \cdots) \in \Sigma_2,\ \text{其中}\ s_n^* = 1 - s_n,$$

那么 $x_n \neq s$ 且 $d(x_n, s) \leqslant 1/2^{n-1}$, 所以 $x_n \to s$. 于是 s 是 Σ_2 的聚点. 因而, Σ_2 是自密的空间.

设 Σ_2 的子集 D 含有不同的两点 s, t, 则存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $s_k \neq t_k$. 令

$$U = \{u \in \Sigma_2 : u_k = s_k\}, \quad V = \{v \in \Sigma_2 : v_k = t_k\}.$$

对每个 $u \in U$, $v \in V$, 有 $B_d(u, 1/2^k) \subset U$, $B_d(v, 1/2^k) \subset V$, 所以 $\{U, V\}$ 是 Σ_2 的不相交的开覆盖且 $s \in U \cap D$, $t \in V \cap D$, 于是 D 不是 Σ_2 的连通子集. 即 Σ_2 的连通分支都是单点集, 从而 Σ_2 是全不连通的空间. □

定义 5.4.2　对每个 $s \in \Sigma_2$, 定义 $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \cdots)$. 映射 $\sigma: \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 称为移位映射. 由 σ 导出的 Σ_2 上的离散动力系统称为符号动力系统.

移位映射的最大好处是容易看出它的周期点. 对 $s \in \Sigma_2$, 如果存在 $m \in \mathbb{Z}_+$ 使得当 $n \in \mathbb{N}$ 时有 $s_n = s_{n+m}$, 则称 s 为 Σ_2 的循环列, 记为 $s = (\dot{s}_0 \dot{s}_1 \cdots \dot{s}_{m-1})$. 显然, 对 $s \in \Sigma_2$, $s = (\dot{s}_0 \dot{s}_1 \cdots \dot{s}_{m-1})$ 当且仅当 $\sigma^m(s) = s$, 所以对固定的 $m \in \mathbb{Z}_+$, 满足 $\sigma^m(s) = s$ 的 s 恰有 2^m 个. 下述定理列举了移位映射的一些动力学性质. 注意到, 若 $s, t \in \Sigma_2$ 的第 $n+1$ 项不同, 则 $d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) \geqslant 1$.

定理 5.4.2　移位映射 $\sigma: \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 是连续的满映射, 且具有下述性质:

(1) $\overline{P(\sigma)} = \Sigma_2$;

(2) 存在 $s^* \in \Sigma_2$ 使得 $\overline{O_\sigma(s^*)} = \Sigma_2$;

(3) 对任意的 $s, t \in \Sigma_2$, 或者存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\sigma^m(s) = \sigma^m(t)$, 或者存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\{n_k\}$ 使得每个 $d(\sigma^{n_k}(s), \sigma^{n_k}(t)) \geqslant 1$;

(4) 存在 Σ_2 的不可数集 S, 满足下列 3 个条件:

(a) $\forall\ s \neq t \in S,\ d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) \not\to 0$;

(b) $\forall\ s \neq t \in S$, 存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\{n_k\}$ 使得 $d(\sigma^{n_k}(s), \sigma^{n_k}(t)) \to 0$;

(c) $\forall\ s \in S,\ t \in P(\sigma),\ d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) \not\to 0$.

证明 显然, σ 是满映射. 对 $s, t \in \Sigma_2,\ n \in \mathbb{Z}_+$, 若 $d(s,t) < 1/2^{n+1}$, 则 s, t 的前 $n+2$ 项相同, 于是 $\sigma(s),\ \sigma(t)$ 的前 $n+1$ 项相同, 所以 $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leqslant 1/2^n$. 从而, σ 是连续的.

(1) $\forall\ s \in \Sigma_2,\ n \in \mathbb{N}$, 令 $t = (\dot{s}_0 \dot{s}_1 \cdots \dot{s}_n)$, 则 $t \in P(\sigma)$ 且 $d(s,t) \leqslant 1/2^n$, 所以 $s \in \overline{P(\sigma)}$.

(2) 相继把长为 $1, 2, 3, \cdots$ 的所有 0, 1 的数列 (即, 包含由 0, 1 组成的所有可能的有限长度的序列), 依从小到大的顺序, 排列而成的序列记为

$$s^* = (0100011011000001\cdots).$$

$\forall\ s \in \Sigma_2,\ n \in \mathbb{Z}_+$, 则 $s_0 s_1 \cdots s_n$ 是某一自然数的 2 进制表示, 设 $s_0 s_1 \cdots s_n$ 是 s^* 中第 m 项至第 $m+n$ 项的一段, 则 $d(s, \sigma^{m-1}(s^*)) \leqslant 1/2^n$, 所以 $s \in \overline{O_\sigma(s^*)}$.

(3) 设 $s, t \in \Sigma_2$, 若存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geqslant m$ 时有 $s_n = t_n$, 则 $\sigma^m(s) = \sigma^m(t)$. 若不存在这样的 m, 则存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\{n_k\}$ 使得每个 $s_{n_k} \neq t_{n_k}$, 于是 $d(\sigma^{n_k}(s), \sigma^{n_k}(t)) \geqslant |s_{n_k} - t_{n_k}| = 1$.

(4) 对每个 $s \in \Sigma_2$, 令 $\bar{s} = (s_0 0 s_0 s_1 11 s_0 s_1 s_2 000 s_0 s_1 s_2 s_3 1111 s_0 \cdots) \in \Sigma_2$. 记 $S = \{\bar{s} : s \in \Sigma_2\}$. 若 $s \neq t \in \Sigma_2$, 则 $\bar{s} \neq \bar{t}$, 所以 $|S| = |\Sigma_2|$, 于是 S 是 Σ_2 的不可数子集.

(a) $\forall\ s \neq t \in \Sigma_2$, 则存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $s_i \neq t_i$, 于是存在无限个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\bar{s}_n \neq \bar{t}_n$. 存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\{n_k\}$ 使得每个 $d(\sigma^{n_k}(\bar{s}), \sigma^{n_k}(\bar{t}) \geqslant 1$, 从而 $d(\sigma^n(\bar{s}), \sigma^n(\bar{t})) \not\to 0$.

(b) $\forall\ s \neq t \in \Sigma_2$, $\bar{s}$ 中 $s_0 s_1 \cdots s_k$ 第一次出现在第 $k(k+1)+1$ 项至第 $(k+1)^2$ 项, 后紧接 $k+1$ 项全为 0 或 1. 若令 $n_k = (k+1)^2$, 则 $d(\sigma^{n_k}(\bar{s}), \sigma^{n_k}(\bar{t})) \leqslant 1/2^k$, 从而 $d(\sigma^{n_k}(\bar{s}), \sigma^{n_k}(\bar{t})) \to 0$.

(c) $\forall\ s \in \Sigma_2,\ t \in P(\sigma)$, 由于 $\bar{s}$ 中含有任意有限长的 $00\cdots0$ 段和 $11\cdots1$ 段, 所以 $\bar{s}$ 和任一循环列都有无穷多对应项不同, 从而 $d(\sigma^n(\bar{s}), \sigma^n(t)) \not\to 0$. □

由此可见, 在 σ 作用下 Σ_2 的点似乎呈现一片混乱的运动状态. 例如, (1) 表明, 任一点的邻域中都有周期点; (2) 表明, 从任一点的邻域, 都可以找到这样的点, 它的轨道能进入其他任一点的邻域; (4) 表明, 存在 Σ_2 的不可数集, 其任意两点的轨

道, 可以任意地靠近, 又可以一再地拉开距离, 且完全不具有周期性. 这种现象被称为 “浑沌现象”. 它可能出现于物理、化学、生物等许多领域所遇到的数学问题的讨论中, 引起了科学家们广泛的兴趣. 我们将在 5.6 节中分析这一概念.

作为符号动力系统的一个应用, 我们讨论虫口模型的动态映射. 从物种存活数的微分方程模型, 导出物种生长模型的动态映射

$$f(x) = rx(1-x), \quad x \in [0,1],\ r > 0.$$

对于不同的 r 值, 所生成的离散动力系统呈现出丰富多采的性态. 下面证明当 $r > 2+\sqrt{5}$ 时, 存在 f 的不变子集 Λ 使得 $f|_\Lambda$ 与移位映射 σ 拓扑共轭, 从而可通过 Σ_2 的动力学性质来研究 Λ 的性质.

以下假设 $r > 2+\sqrt{5}$. 记 $\mathbb{I} = [0,1]$ 的子集 U 的 Lebesgue 测度为 $\mu(U)$, $f^{-1}(\mathbb{I})$ 的两个连通分支为 U_0, U_1, 见图 5.4.1.

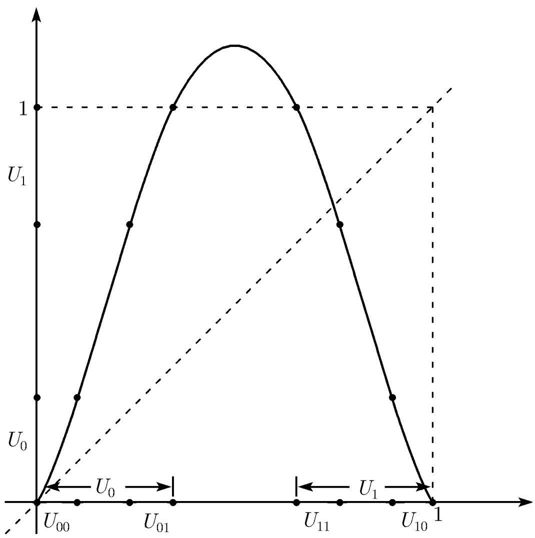


图 5.4.1

引理 5.4.1 动态映射 $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ 的简单性质:

(1) f 有不动点 0, 极大点 1/2, $f(0) = 0$ 且 $f(1/2) = r/4 > 1$;

(2) 存在实数 $\lambda > 1$, 使得对每个 $x \in U_0 \cup U_1$, 有 $|f'(x)| > \lambda$;

(3) 如果 U 是 $U_0 \cup U_1$ 的连通子集, 则 $\mu(f(U)) \geqslant \lambda\mu(U)$.

归纳地定义 $\mathbb{I}$ 的子集列 $\{U_{s_0 s_1 \cdots s_n}\}$ 如下:

对 $i, j \in \{0,1\}$, 由于 $U_i \subset \mathbb{I} = f(U_j)$, 定义 $U_{ij} = U_i \cap f^{-1}(U_j)$, 则

$$f(U_{ij}) = U_j \text{ 且 } \mu(U_{ij}) \leqslant 1/\lambda^2.$$

一般地, 对 $n \in \mathbb{Z}_+$, $s_0, s_1, \cdots, s_n \in \{0,1\}$, 定义

$$\begin{aligned} U_{s_0 s_1 \cdots s_n} &= U_{s_0} \cap f^{-1}(U_{s_1}) \cap f^{-2}(U_{s_2}) \cap \cdots \cap f^{-n}(U_{s_n}) \\ &= U_{s_0} \cap f^{-1}(U_{s_1 s_2 \cdots s_n}). \end{aligned}$$

引理 5.4.2 闭集 $U_{s_0 s_1 \cdots s_n}$ 满足:

(1) $U_{s_0 s_1 \cdots s_n} \subset U_{s_0 s_1 \cdots s_{n-1}}$;

(2) $f(U_{s_0 s_1 \cdots s_n}) = U_{s_1 s_2 \cdots s_n}$;

(3) $\mu(U_{s_0 s_1 \cdots s_n}) \leqslant 1/\lambda^{n+1}$.

证明 (1) 由定义,

$$U_{s_0 s_1 \cdots s_{n-1}} = U_{s_0} \cap f^{-1}(U_{s_1}) \cap f^{-2}(U_{s_2}) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(U_{s_{n-1}}) \supset U_{s_0 s_1 \cdots s_n}.$$

(2) $f(U_{s_0 s_1 \cdots s_n}) = f(U_{s_0} \cap f^{-1}(U_{s_1 s_2 \cdots s_n})) = f(U_{s_0}) \cap U_{s_1 s_2 \cdots s_n} = U_{s_1 s_2 \cdots s_n}$.

(3) 由引理 5.4.1,

$$\mu(U_{s_1 s_2 \cdots s_n}) = \mu(f(U_{s_0 s_1 \cdots s_n})) \geqslant \lambda \mu(U_{s_0 s_1 \cdots s_n}),$$

所以

$$\mu(U_{s_0 s_1 \cdots s_n}) \leqslant \mu(U_{s_1 s_2 \cdots s_n})/\lambda \leqslant 1/\lambda^{n+1}. \qquad \square$$

闭集列 $\{U_{s_0 s_1 \cdots s_n}\}$ 的形成过程如图 5.4.2 所示, 类似于 Cantor 三分集的构造.

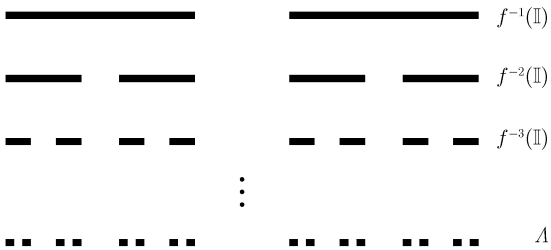


图 5.4.2

定义

$$\varLambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\mathbb{I}), \text{ 即 } \varLambda = \{x \in \mathbb{I} : \text{ 对每个 } n \in \mathbb{N}, \text{ 有 } f^n(x) \in \mathbb{I}\}.$$

如果把 f 的定义域扩张于 $\mathbb{R}$, 则当 $x \notin \varLambda$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = -\infty$.

定理 5.4.3 $\varLambda$ 是 f 的紧不变子集, 且 $f|_\varLambda$ 拓扑共轭于移位映射 $\sigma : \varSigma_2 \to \varSigma_2$.

证明 显然, $\varLambda$ 是 f 的紧不变子集. 因为 $\mathbb{I}$ 是紧空间, 由引理 5.4.2, 对每个 $s \in \varSigma_2$, 令 $U(s) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_{s_0 s_1 \cdots s_n}$, 则 $U(s)$ 是单点集. 对每个 $n \in \mathbb{N}$, $U(s) \subset U_{s_0 s_1 \cdots s_n}$, 所以 $f^n(U(s)) \subset \mathbb{I}$, 于是 $U(s) \subset f^{-n}(\mathbb{I})$. 从而 $U(s) \subset \varLambda$. 定义 $h : \varSigma_2 \to \varLambda$ 为 $h(s) = U(s)$.

(1) h 是满射, 即 $\Lambda=\bigcup\limits_{s\in\Sigma_2}U(s)$.

设 $x\in\Lambda$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$, 那么 $f^{n+1}(x)\in\mathbb{I}$, 从而 $f^n(x)\in f^{-1}(\mathbb{I})=U_0\cup U_1$.

定义

$$s_n=\begin{cases}0, & f^n(x)\in U_0,\\ 1, & f^n(x)\in U_1,\end{cases}$$

那么 $f^n(x)\in U_{s_n}$, 于是 $x\in U_{s_0s_1\cdots s_n}$. 令 $s=(s_0s_1s_2\cdots)$, 则 $s\in\Sigma_2$ 且 $x\in U(s)$.

(2) h 是单射.

设 $s,t\in\Sigma_2$ 且 $s\neq t$, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $s_k\neq t_k$, 于是 $U_{s_k}\cap U_{t_k}=\varnothing$. 因为

$$h(s)\in U_{s_0s_1\cdots s_k},\quad h(t)\in U_{t_0t_1\cdots t_k},$$

所以 $f^k(h(s))\in U_{s_k}$, $f^k(h(t))\in U_{t_k}$, 从而 $f^k(h(s))\neq f^k(h(t))$. 因此 $h(s)\neq h(t)$.

(3) h 是连续的.

$\forall\ s,t\in\Sigma_2$, $n\in\mathbb{Z}_+$, 如果 $d(s,t)<1/2^n$, 那么 s,t 的前 $n+1$ 项完全相同, 于是 $h(s),h(t)\in U_{s_0s_1\cdots s_n}$, 所以 $|h(s)-h(t)|\leqslant 1/\lambda^{n+1}$. 从而 h 连续.

由于 Σ_2 是紧的, Λ 是 T_2 空间, 所以 h 是同胚 (见推论 3.6.1). 对每个 $s\in\Sigma_2$, 有

$$\begin{aligned}f(U(s))=&f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}U_{s_0s_1\cdots s_n}\right)=f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-n}(U_{s_n})\right)\\ &=\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-(n-1)}(U_{s_n})=U(\sigma(s)),\end{aligned}$$

即 $f\circ h(s)=h\circ\sigma(s)$. 因而, $f|_\Lambda$ 与 σ 拓扑共轭. □

对于动态生长模型 $f(x)=rx(1-x), x\in\mathbb{I}$, 可以证明当 $r>4$ 时, 定理 5.4.3 是正确的 (见文献 [7] 的定理 22.13).

本节介绍的 Σ_2 是符号动力系统中最简单的情形. 至少有两种更一般的形式, 一是讨论由 n 个符号 $\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 上的符号动力系统 Σ_n, 二是讨论双边符号空间 $\Sigma(2)$, 其序列形如 $s=(\cdots s_{-2}s_{-1}s_0s_1s_2\cdots)$. 5.5 节介绍著名的 Smale 马蹄时就需要这样的符号动力系统.

习 题 5.4

5.4.1 证明: 度量空间 (Σ_2,d) 同胚于积空间 $\prod\limits_{i=0}^{\infty}D_i$, 其中每个 D_i 是 $\{0,1\}$ 赋予离散拓扑的空间.

5.4.2 设 f 是线段 I 上的连续自映射. 若 $3\in\mathrm{PP}(f)$, 则存在 I 的不可数子集 S, 使得 S 不含有周期点, 但满足下列 3 个条件:

(1) $\forall\ x\neq y\in S$, $|f^n(x)-f^n(y)|\not\to 0$;

(2) $\forall\ x \neq y \in S$, 存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\{n_k\}$ 使得 $|f^{n_k}(x) - f^{n_k}(y)| \to 0$;

(3) $\forall\ x \in S,\ p \in P(f),\ |f^n(x) - f^n(p)| \not\to 0$.

5.4.3　证明引理 5.4.1.

5.4.4　设动态映射 $f_r(x) = rx(1-x),\ x \in [0,1],\ r > 0$. 证明:

(1) 当 $0 < r \leqslant 1,\ x \in [0,1]$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = 0$;

(2) 当 $1 < r \leqslant 3,\ x \in (0,1)$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \dfrac{r-1}{r}$.

5.5　Smale 马 蹄

1967 年, S. Smale 给出了被称为 "马蹄" 的著名模型. 这个例子中的马蹄映射 φ, 在它的一个不变集上, 拓扑共轭于双边符号动力系统 $\Sigma(2)$ 的移位映射 σ. 本节着重介绍这一著名的例子.

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上的两个正方形:

$$P = (-1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon) \times (-1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon),$$

$$Q = [-1,1] \times [-1,1].$$

把正方形 P 在竖直方向上拉长 (拉伸比大于 2), 在水平方向上压缩 (压缩比小于 1/2), 做成一竖直的窄长条, 然后弯成马蹄形放回到 P 上, 如图 5.5.1 所示.

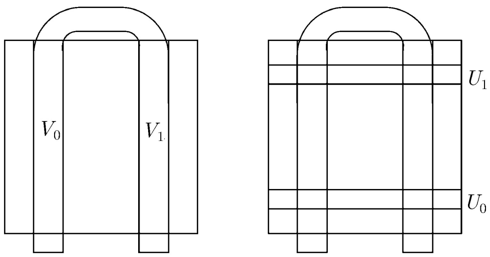


图 5.5.1

用这种方式定义了嵌入映射 $\varphi: P \to \mathbb{R}^2$. Smale 证明了 φ 有不变集 $\Lambda \subset Q$, 使得 $\varphi|_\Lambda$ 拓扑共轭于双边符号动力系统 $\Sigma(2)$ 的移位映射.

首先, 观察到 $V = \varphi(Q) \cap Q$ 由两个不相交的竖条 V_0 和 V_1 组成, 即 $V = V_0 \cup V_1$. 每一竖条的宽度小于 Q 宽度的一半, $\theta(V_0),\ \theta(V_1) < 1$, 其中 $\theta(V_i)$ 表示竖条 V_i 的宽度.

其次, 注意到 $U = \varphi^{-1}(V)$ 由两个不相交的横条 $U_0 = \varphi^{-1}(V_0)$ 和 $U_1 = \varphi^{-1}(V_1)$ 组成, 即 $U = U_0 \cup U_1$. 每一横条的厚度小于 Q 的厚度的一半, $\theta(U_0),\ \theta(U_1) < 1$, 其中 $\theta(U_i)$ 表示横条 U_i 的厚度.

记

$$U_{ij}=\varphi^{-1}(V_i\cap U_j)=U_i\cap\varphi^{-1}(U_j),\quad i,j=0,1,$$
$$V_{ij}=\varphi(U_i\cap V_j)=V_i\cap\varphi(V_j),\quad i,j=0,1,$$

则 U_{ij} 是包含在 U_i 中的横条, 其厚度小于 U_i 的厚度的一半, 对于 V_{ij} 有类似的结果. 因而

$$\theta(U_{ij})<\frac{1}{2}\theta(U_i)<\frac{1}{2},\ \text{且}\ \theta(V_{ij})<\frac{1}{2}\theta(V_i)<\frac{1}{2}.$$

一般地, 对 $s_i\in\{0,1\}$, $i=0,\pm1,\cdots,\pm k$, 定义

$$\begin{aligned}U_{s_0s_1\cdots s_k}&=\varphi^{-1}(V_{s_0}\cap U_{s_1\cdots s_k})=U_{s_0}\cap\varphi^{-1}(U_{s_1\cdots s_k})\\&=U_{s_0}\cap\varphi^{-1}(U_{s_1})\cap\cdots\cap\varphi^{-k}(U_{s_k}),\\V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}&=\varphi(U_{s_{-1}}\cap V_{s_{-k}\cdots s_{-2}})=V_{s_{-1}}\cap\varphi(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}})\\&=V_{s_{-1}}\cap\varphi(V_{s_{-2}})\cap\cdots\cap\varphi^{k-1}(V_{s_{-k}}).\end{aligned}$$

可以看出, $U_{s_0s_1\cdots s_k}$ 是包含于 $U_{s_0s_1\cdots s_{k-1}}$ 中的一横条, 且 $V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}$ 是包含于 $V_{s_{-k+1}\cdots s_{-2}s_{-1}}$ 中的一竖条.

引理 5.5.1 闭集 $U_{s_0s_1\cdots s_k}$ 和 $V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}$ 满足:

(1) $U_{s_0s_1\cdots s_k}\subset U_{s_0s_1\cdots s_{k-1}}$, $V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}\subset V_{s_{-k+1}\cdots s_{-2}s_{-1}}$;

(2) $\varphi(U_{s_0s_1\cdots s_k})=V_{s_0}\cap U_{s_1\cdots s_k}$, $\varphi(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}})\cap V_{s_0}=V_{s_{-k}\cdots s_{-1}s_0}$;

(3) $\theta(U_{s_0s_1\cdots s_k})<\dfrac{1}{2}\theta(U_{s_1\cdots s_k})<\dfrac{1}{2^k}$, $\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}})<\dfrac{1}{2}\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}})<\dfrac{1}{2^{k-1}}$.

证明 由定义直接验证, 可得 (1) 和 (2). 根据定义, 有

$$U_{s_0s_1\cdots s_k}=\varphi^{-1}(V_{s_0}\cap U_{s_1s_2\cdots s_k}).$$

因为 φ^{-1} 在竖向上是压缩的, 压缩比小于 1/2, 所以

$$\theta(U_{s_0s_1\cdots s_k})<\frac{1}{2}\theta(U_{s_1s_2\cdots s_k})<\frac{1}{2^k}.$$

类似地, 可以证明

$$\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}})<\frac{1}{2}\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-3}s_{-2}})<\frac{1}{2^{k-1}}.\qquad\square$$

对 $s=(\cdots s_{-2}s_{-1}s_0s_1s_2\cdots)\in\Sigma(2)$, 引入记号

$$U(s)=\bigcap_{j=0}^{\infty}\varphi^{-j}(U_{s_j})=\bigcap_{k=0}^{\infty}U_{s_0s_1\cdots s_k},$$
$$V(s)=\bigcap_{j=1}^{\infty}\varphi^{j-1}(V_{s_{-j}})=\bigcap_{k=1}^{\infty}V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}.$$

双边符号动力系统的移位映射 $\sigma:\Sigma(2)\to\Sigma(2)$ 定义为

$$\sigma(s) = (\cdots s_{-2}s_{-1}s_0; s_1s_2\cdots), \quad \text{其中 } s = (\cdots s_{-2}s_{-1}; s_0s_1s_2\cdots).$$

引理 5.5.2 对每个 $s = (\cdots s_{-2}s_{-1}s_0s_1s_2\cdots) \in \Sigma(2)$, $V(s) \cap U(s)$ 是单点集, 且 $\varphi(V(s) \cap U(s)) = V(\sigma(s)) \cap U(\sigma(s))$.

证明 对任意 $k \in \mathbb{N}$, $V(s) \cap U(s) \subset V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}} \cap U_{s_0s_1\cdots s_k} \subset Q$, Q 是紧空间, 且

$$\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}) < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \theta(U_{s_0s_1\cdots s_k}) < \frac{1}{2^k},$$

所以 $V(s) \cap U(s)$ 是单点集.

由引理 5.5.1 的 (2), 得

$$\varphi(U(s)) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \varphi(U_{s_0s_1\cdots s_k}) = V_{s_0} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{s_1s_2\cdots s_k} = V_{s_0} \cap U(\sigma(s)),$$

$$\varphi(V(s)) \cap V_{s_0} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \varphi(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}) \cap V_{s_0} = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{s_{-k}\cdots s_{-1}s_0} = V(\sigma(s)),$$

$$\begin{aligned}\varphi(V(s) \cap U(s)) &= \varphi(V(s)) \cap \varphi(U(s)) = \varphi(V(s)) \cap V_{s_0} \cap U(\sigma(s)) \\ &= V(\sigma(s)) \cap U(\sigma(s)).\end{aligned}$$

□

令

$$\Lambda = \bigcup_{s \in \Sigma(2)} (V(s) \cap U(s)).$$

定理 5.5.1 (Smale 定理, 1967) Λ 是 φ 的紧不变子集, 且 $\varphi|_\Lambda$ 拓扑共轭于双边符号动力系统的移位映射 $\sigma : \Sigma(2) \to \Sigma(2)$.

证明 与定理 5.4.3 的证明过程类似. 定义映射 $h : \Sigma(2) \to \Lambda$ 为

$$h(s) = V(s) \cap U(s), \quad s \in \Sigma(2).$$

则 h 是满射. 由引理 5.5.2, Λ 是 φ 的不变子集, 且 $\varphi \circ h = h \circ \sigma$.

(1) h 是单射. 设 $s, t \in \Sigma(2)$. 如果存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $s_k \neq t_k$, 那么

$$U_{s_k} \cap U_{t_k} = \varnothing, \quad \varphi^k(h(s)) \in U_{s_k}, \quad \varphi^k(h(t)) \in U_{t_k},$$

因而 $h(s) \neq h(t)$. 如果存在 $l \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $s_{-l} \neq t_{-l}$, 那么

$$V_{s_{-l}} \cap V_{t_{-l}} = \varnothing, \quad \varphi^{-(l-1)}(h(s)) \in V_{s_{-l}}, \quad \varphi^{-(l-1)}(h(t)) \in V_{t_{-l}},$$

因而也有 $h(s) \neq h(t)$.

(2) h 是连续映射. 如果 $s, t \in \Sigma(2)$ 满足 $d(s, t) < 1/2^k$, 那么 $h(s)$ 和 $h(t)$ 就都落在宽度小于 $1/2^{k-1}$, 厚度小于 $1/2^k$ 的矩形之中, 即

$$h(s),\ h(t) \in V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}} \cap U_{s_0s_1\cdots s_k},$$

所以 $|h(s)-h(t)|<1/2^k$, 于是 h 是连续的.

由此, h 是同胚, 从而 Λ 是紧空间, 且 $\varphi|_\Lambda$ 与 σ 拓扑共轭. □

在 “马蹄” 模型中起关键作用的因素是: 不相交的横条与不相交的竖条之间的一定的映射关系, 以及这些条的厚度和宽度的一定的控制关系. 对这些因素加以概括和推广, 可给出产生 “马蹄” 形移位不变集的更一般的条件. 读者可参考文献 [8].

5.6 浑沌映射

在讨论符号动力系统时我们提到过 “浑沌现象”. 究竟什么是浑沌? 1963 年, E. Lorenz (美, 1917~2008) 提出了 “浑沌理论”, 其主要精神是, 在浑沌系统中, 初始条件的微小变化, 可能造成后续长期而巨大的连锁反应. 1975 年, T. Y. Li 和 J. A. Yorke 第一次引入数学上的 “浑沌” 概念. 他们指出, 线段上的连续自映射 f, 如果 $\mathrm{PP}(f)$ 无上界, 且满足形如定理 5.4.2 的 (4) 中的 3 个条件 (见习题 5.4.2), 则称为有浑沌现象. 这是关于浑沌的第一个严格的数学表述. 这以后, 人们还用其他方式来定义或描述浑沌现象, 虽然逻辑上并不一定等价, 但在本质上都反映了浑沌 “形似紊乱、实则有序” 这一哲学思想. 下述定义为许多学者采用.

定义 5.6.1 (R. L. Devaney, 1989) 设 (X,d) 是度量空间. 连续映射 $f:X\to X$ 称为 X 上的*浑沌*, 如果 f 满足

(1) *初值的敏感依赖性*: 存在 $\delta>0$, 对任意的 $x\in X$ 及 x 在 X 中的任意邻域 U, 有 $y\in U$ 和 $n\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $d(f^n(x),f^n(y))>\delta$;

(2) *周期点的稠密性*: $\overline{P(f)}=X$;

(3) *拓扑传递性*: 对 X 的任意非空开集 U, V, 存在 $k\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $f^k(U)\cap V\neq\varnothing$.

本节的 “浑沌” 均指在 Devaney 意义下的浑沌. 初值的敏感依赖性表明, 度量空间 X 中的每一点是聚点, 所以 X 是自密的空间. 周期点的稠密性及拓扑传递性都可在一般的拓扑空间中定义, 而初值的敏感依赖性与空间的度量有关.

例 5.6.1 设 $X=(1,+\infty)$, $Y=(0,+\infty)$ 具有通常的欧氏度量. 定义 $f:X\to X$ 为 $f(x)=\mathrm{e}x,\ x\in X$; 定义 $g:Y\to Y$ 为 $g(y)=y+1,\ y\in Y$. 显然, 当 $n\in\mathbb{Z}_+$ 时,

$$f^n(x)=\mathrm{e}^n x,\quad g^n(y)=y+n,$$

所以 f 具有初值的敏感依赖性, 但是 g 不具有初值的敏感依赖性. 再定义 $h:X\to Y$ 为 $h(x)=\lg x,\ x\in X$, 则 h 是 f 到 g 的拓扑共轭.

敏感依赖性很容易为数学家和非数学家所理解, 甚至称之为 “*蝴蝶效应*”, 它体现了浑沌的本质, 即简单系统的绝对不可预测性, 这也是人们普遍乐于在浑沌的定义中接受这条件的一个原因. 周期点的稠密性比敏感依赖性缺乏直观性, 在一个浑

沌系统中出现大量的周期点是一种奇妙的数学现象, 它表现了在看似随机的系统中能出现某种规律的内容, 支持了 "浑沌是有序的" 思想, 所以在研究浑沌现象时讨论周期点的稠密性是可以理解又合情合理的假设. 拓扑传递性本身缺乏直观性, 表面上难用非数学的语言来解释, 对于线段上的连续自映射, 它是浑沌定义中最本质的概念 (见定理 5.6.3). 注意到, 设映射 $f: X \to X$, 若 $U,\ V \subset X,\ k \in \mathbb{Z}_+$, 则

$$f^k(U) \cap V \neq \varnothing \Leftrightarrow U \cap f^{-k}(V) \neq \varnothing,$$

所以定义 5.6.1 中拓扑传递性的关系可换为 $f^{-k}(U) \cap V \neq \varnothing$.

引理 5.6.1 设 f 是拓扑空间 X 上的连续自映射. 若 f 具有拓扑传递性或者周期点稠密性, 则 X 的每一点是 f 的非游荡点.

证明 设 f 具有拓扑传递性. 对每个 $x \in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^k(U) \cap U \neq \varnothing$, 于是 $f^{-k}(U) \cap U \neq \varnothing$, 所以 $x \in \Omega(f)$.

设 f 具有周期点稠密性. 由引理 5.1.1, $P(f) \subset R(f) \subset \Omega(f)$ 且 $\Omega(f)$ 是 X 的闭子集, 所以 $\Omega(f) = X$. □

定理 5.6.1 设 f 是拓扑空间 X 上的连续自映射. 如果存在 $x_0 \in X$ 使得 $O_f(x_0)$ 是 X 的稠密子集, 则 X 是可分空间且 f 是拓扑传递的. 若 X 是完全度量空间或局部紧度量空间, 则逆命题成立.

证明 设 $O_f(x_0)$ 是 X 的稠密子集, 由于 $O_f(x_0)$ 是可数集, 所以 X 是可分空间. 对 X 的任意非空开集 $U,\ V$, 存在 $i, j \in \mathbb{N}$ 使得 $f^i(x_0) \in V,\ f^j(x_0) \in f^{-i}(U)$, 于是 $f^i(x_0) \in f^{-j}(U)$, 所以 $f^{-j}(U) \cap V \neq \varnothing$. 故 f 是拓扑传递的.

反之, 设可分空间 X 是完全度量空间或局部紧度量空间, 且 f 是拓扑传递的. 由定理 3.8.3, X 具有可数基. 让 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是空间 X 的可数基. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 置 $F_n = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}_+} f^{-m}(U_n)$, 则 F_n 是 X 的开子集. 由拓扑传递性, F_n 还是 X 的稠密子集. 因为 X 是完全度量空间或局部紧度量空间, 所以存在 $x_0 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} F_n$ (见定理 4.4.4 或定理 4.4.5). 于是对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $m_n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $x_0 \in f^{-m_n}(U_n)$, 即 $f^{m_n}(x_0) \in U_n$, 从而 $O_f(x_0) \cap U_n \neq \varnothing$. 因此, $O_f(x_0)$ 是 X 的稠密子集. □

上述定理的证明中利用了完全度量空间或局部紧度量空间是 Baire 空间.

推论 5.6.1 移位映射 $\sigma: \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 是浑沌映射.

证明 由定理 5.4.2 和定理 5.6.1, 移位映射 σ 具有周期点的稠密性和拓扑传递性. 下面验证它也具有初值的敏感依赖性. 取定 $\delta = 1/2$, 对 $s \in \Sigma_2,\ n \in \mathbb{N}$, 记

$$x_n = (s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_n^* s_{n+1} \cdots) \in \Sigma_2,\ \text{其中}\ s_n^* = 1 - s_n,$$

那么 $d(s, x_n) \leqslant 1/2^{n-1}$ 且 $d(\sigma^n(s), \sigma^n(x_n)) = 1 > \delta$. 故 σ 是浑沌映射. □

尽管初值的敏感依赖性在外表是吸引人的, 下述定理多少使我们有点感到吃惊, 看似美丽的敏感依赖性在数学上却是多余的. 浑沌本身仅依赖于空间的拓扑性质而不是度量性质.

定理 5.6.2　设 (X,d) 是无限的度量空间, $f: X \to X$ 是连续的自映射. 若 f 是拓扑传递的且 $P(f)$ 在 X 中稠密, 则 f 是浑沌映射.

证明　我们要证明 f 具有初值的敏感依赖性. 先取定 f 不同的周期点 q_1, q_2, 令 $\delta_0 = d(O_f(q_1), O_f(q_2))$. 对每个 $x \in X$, 由三角不等式, 存在 $q_x \in \{q_1, q_2\}$ 满足 $d(O_f(q_x), x) \geqslant \delta_0/2$.

再令 $\delta = \delta_0/8$. 对任意的 $x \in X$ 及 x 在 X 中任意的邻域 U, 记 $W = U \cap B(x,\delta)$, 则存在 $p \in P(f) \cap W$. 设 p 的周期是 n. 由前所证, 又存在 f 的周期点 q_x 使得 $d(O_f(q_x), x) \geqslant 4\delta$. 置 $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f^{-i}(B(f^i(q_x),\delta))$, 则 V 是 X 的开集且 $q_x \in V$. 由拓扑传递性, 存在 $y \in W$ 和 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^k(y) \in V$. 设 j 是不超过 $1 + k/n$ 的最大整数, 那么 $j \leqslant 1 + k/n < j+1$, 于是 $1 \leqslant nj - k \leqslant n$, 从而

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subset B(f^{nj-k}(q_x), \delta).$$

由于 $f^{nj}(p) = p$, 所以

$$\begin{aligned}
4\delta &\leqslant d(x, f^{nj-k}(q_x)) \\
&\leqslant d(x,p) + d(p, f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q_x)) \\
&< 2\delta + d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)),
\end{aligned}$$

从而 $d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) > \delta$ 或 $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$. 因而, f 具有初值的敏感依赖性.　□

浑沌映射是否还有其他的蕴涵关系?

例 5.6.2　(1) 具有初值的敏感依赖性, 且周期点的稠密性 $\not\Rightarrow$ 拓扑传递性.

在区间 $I = [0,2]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leqslant x < 1/3, \\ -3x+2, & 1/3 \leqslant x < 2/3, \\ 3x-2, & 2/3 \leqslant x < 1, \\ f(x-1)+1, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

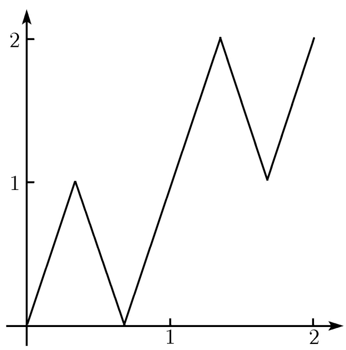


图 5.6.1

如图 5.6.1 所示, 由于在可导点有 $|f'(x)| = 3$, 所以围绕这一点的每个邻域经过迭代后将扩大, 于是 f 具有初值的敏感依赖性. 另一方面, f^n 的任意两个相邻整数值之间有 $3^n - 2$ 个不动点, 而这些相邻不动点之间的距离小于 $1/3^{n-1}$. 因此, f 的周期

点之集在 I 中稠密. 但由于 $f([0,1])=[0,1]$, 所以 f 不是拓扑传递的.

(2) 具有初值的敏感依赖性, 且拓扑传递性 $\not\Rightarrow$ 周期点的稠密性.

令 $X=\mathbb{S}^1-\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}p/q}:p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0\}$, 赋予通常的弧长度量 d. 定义连续映射 $f:X\to X$ 为 $f(z)=z^2$. 对每个 $z\in X$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $f^n(z)=z^{2^n}$. 若 $f^n(z)=z$, 则 $z^{2^n-1}=1$, 即 z 是 1 的 2^n-1 次方根, 从而

$$z=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{2^n-1}}\notin X,\ \text{其中}\ k=1,2,\cdots,2^n-1,$$

矛盾. 故 f 不具有周期点. 由于映射 f 也可表示为 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$, 即 f 的作用将加倍弧角的距离, 所以 X 中的任一非空开集经过 f 的适当迭代后可扩张到整个 X 上. 因此, f 是拓扑传递的. 此外, 若 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\in X$ 且 $0<|\theta-\varphi|<\pi$, 则选取 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\pi}{2^{n+1}}\leqslant|\theta-\varphi|<\frac{\pi}{2^n},$$

那么 $d(f^n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),f^n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}))=d(\mathrm{e}^{2^n\mathrm{i}\theta},\mathrm{e}^{2^n\mathrm{i}\varphi})\geqslant\pi/2$. 从而, f 具有初值的敏感依赖性.

推论 5.6.2 浑沌映射是拓扑共轭不变性.

证明 设 X, Y 都是拓扑空间, $f:X\to X$, $g:Y\to Y$ 都是连续映射且 $h:X\to Y$ 是 f 到 g 的拓扑共轭. 再设 f 是可度量空间 (X,d) 上的浑沌映射, 则 Y 也是可度量空间. 由于 $h(P(f))=P(g)$, 所以 $\overline{P(g)}=h(\overline{P(f)})=Y$, 从而 $P(g)$ 是 Y 的稠密子集. 另一方面, 设 U, V 都是空间 Y 的非空开集, 存在 $k\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $f^k(h^{-1}(U))\cap h^{-1}(V)\neq\varnothing$, 由于 $f^k\circ h^{-1}=h^{-1}\circ g^k$, 于是 $g^k(U)\cap V\neq\varnothing$, 即 g 是拓扑传递的. 由定理 5.6.2, $g:Y\to Y$ 是浑沌映射. □

对动态映射 $f(x)=rx(1-x),x\in[0,1]$, 定理 5.4.3 表明, 当 $r>2+\sqrt{5}$ 时, 存在 $[0,1]$ 的子集 $\varLambda$ 使得 $f|_\varLambda$ 与移位映射 σ 是拓扑共轭的, 由推论 5.6.1 和推论 5.6.2, $f|_\varLambda$ 是浑沌映射.

下面将更进一步证明, 对区间上的动力系统, 拓扑传递性就可导出浑沌映射.

引理 5.6.2 设 f 是区间 I 上的连续自映射且 I 的子区间 J 不含有 f 的周期点. 如果 $z,f^m(z),f^n(z)\in J$ 且 $0<m<n$, 那么或者 $z<f^m(z)<f^n(z)$, 或者 $f^n(z)<f^m(z)<z$.

证明 首先断言:

$$\forall\, m,n\in\mathbb{Z}_+,\ f^m(z)>z\Leftrightarrow f^n(z)>z. \tag{5.6.1}$$

若不然, 不妨设 $f^n(z)<z<f^m(z)$. 由 $f^n(z)<z$, 令 $g=f^n$, 则 $g(z)<z$. 归纳假设 $g^k(z)<z$, 若 $g^{k+1}(z)>g(z)$, 则连续函数 $g^k(x)-x$ 在 z, $g(z)$ 的值异号, 存在 $c\in(g(z),z)\subset J$ 使得 $g^k(c)=c$, 矛盾. 由于 $g^{k+1}(z)\neq g(z)$, 从而,

$g^{k+1}(z) < g(z) < z$. 于是 $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$ 有 $g^k(z) < z$, 即 $f^{nk}(z) < z$. 同理, 由 $z < f^m(z)$ 得 $z < f^{mk}(z)$. 因此, $f^{mn}(z) < z < f^{nm}(z)$, 矛盾. 故断言 (5.6.1) 正确.

若引理不成立, 不妨设 $f^m(z) > \max\{z, f^n(z)\}$. 由 (5.6.1), 有 $z < f^n(z) < f^m(z)$. 再由 (5.6.1), 有 $z < f^{m(n-m)}(z)$. 令 $h = f^{n-m}$, 则 $z < f^n(z) = h(f^m(z)) < f^m(z)$, 让 $y = f^m(z)$, 则 $y, h(y) \in J$ 且 $h(y) < y$, 又由 (5.6.1), 有 $h^m(y) < y$, 即 $f^{m(n-m)}(f^m(z)) < f^m(z)$, 从而, 连续函数 $f^{(n-m)m}(x) - x$ 在 z, $f^m(z)$ 的值异号, 矛盾. □

定理 5.6.3 设 f 是区间 I 上的连续自映射. 若 f 是拓扑传递的, 则 f 是浑沌映射.

证明 由定理 5.6.2, 只需证明 $P(f)$ 在 I 中稠密. 若不然, 则存在 I 的子区间 J 不含 f 的周期点. 设 A, B 是 J 中不相交的开区间, 由 f 的传递性, 存在 $m \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^m(A) \cap B \neq \varnothing$, 所以存在 $a \in A \subset J$ 使得 $f^m(a) \in B \subset J$. 这时, $a \notin \{f^i(a) : 1 \leqslant i \leqslant m\}$, 于是每个 $f^i(a)$ 有在 I 中的邻域 V_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ 使得 $V_0 \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i) = \varnothing$ 且 $V_m \subset J$. 取定 J 中的开区间 V 使得 $a \in V \subset \bigcap\limits_{i=0}^{m} f^{-i}(V_i)$, 于是 $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m$ 有 $f^i(V) \cap V \subset V_i \cap V_0 = \varnothing$. 由 f 的传递性, 存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $z \in V$ 使得 $f^n(z) \in V$, 从而 $m < n$ 且 $f^m(z) \in J - V$, 与引理 5.6.2 矛盾. □

由定理 5.6.3 和定理 5.6.1, 有下述推论.

推论 5.6.3 若 f 是区间 I 上的连续自映射, 则 f 是浑沌映射当且仅当 f 含有一条稠密的轨道.

例 5.6.3 例 5.6.2 的 (1) 已说明, 对区间上的连续自映射, 具有初值的敏感依赖性, 且周期点的稠密性 $\not\Rightarrow$ 拓扑传递性.

(1) 周期点的稠密性 $\not\Rightarrow$ 初值的敏感依赖性.

设 f 是单位闭区间 $\mathbb{I}$ 上的恒等映射, 则 $P(f) = \mathbb{I}$, 但是 f 不具有初值的敏感依赖性.

(2) 具有初值的敏感依赖性 $\not\Rightarrow$ 周期点的稠密性.

在区间 $I = [0, 3/4]$ 上, 定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 3x/2, & 0 \leqslant x < 1/2, \\ 3(1-x)/2, & 1/2 \leqslant x \leqslant 3/4. \end{cases}$$

由于在可导点有 $|f'(x)| = 3/2$, 所以 f 具有初值的敏感依赖性. 又由于对每个 $z \in (0, 3/8)$, 轨道 $O_f(z)$ 不再返回区间 $(0, 3/8)$, 所以 f 在 $(0, 3/8)$ 内无周期点.

习　题　5.6

5.6.1 设 X 是有限的度量空间. 构造 X 上的一个连续自映射 f, 使得 f 是拓扑传递的,

周期点是稠密的, 但不具有初值的敏感依赖性.

5.6.2 设 X 是紧的度量空间, 连续函数 $f: X \to X$ 具有初值的敏感依赖性. 如果连续函数 $g: Y \to Y$ 且 h 是 f 到 g 的拓扑共轭, 则 g 也具有初值的敏感依赖性.

5.6.3 验证: 例 5.6.2 的 (1) 中定义的自映射 f 的周期点集在 I 中稠密.

5.6.4 若 X 是度量空间, 则连续映射 $f: X \to X$ 是 X 上的浑沌映射当且仅当对 X 的任意非空开集 U, V, 存在 f 的周期点 $p \in U$ 和 $k \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $f^k(p) \in V$.

第 6 章　基本群及其应用

确定给定的两个拓扑空间是否同胚是拓扑学的基本问题之一. 证明两个空间同胚, 可以构造有连续逆映射的连续映射来实现. 证明两个空间不同胚, 可以寻求一拓扑性质为一空间所具有, 但不为另一空间所具有. 如作为实空间 $\mathbb{R}$ 的紧子空间 [0, 1] 与非紧子空间 (0, 1).

如何证明 $\mathbb{R}^2$ 不同胚于 $\mathbb{R}^3$? 在前面已经学过的拓扑性质, 如分离性、紧性、连通性、可度量性、可数性等, 都不足以区别这两个空间. 所以必须引入一些新的性质和方法. 从直观上, 在 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 中, 围绕 (0, 0) 点的闭曲线不能收缩成一个点, 而在 $\mathbb{R}^3$ 中挖去任一点后的每一条闭曲线仍能够收缩为一个点. 这类性质称为单连通性 (精确的定义见定义 6.1.6). 比单连通性更一般的概念涉及一个群, 称之为基本群. 同胚的两个空间的基本群是同构的. 空间的单连通性恰好表示这个空间的基本群是平凡的. 在方法上的变化主要反映于在特定的拓扑空间上引入代数结构, 由空间之间的同胚导出代数同构. 如果两个空间所对应的代数结构不同构, 则这两空间不同胚. 基本群就是这类代数结构之一. 由此可导出, $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}^3$ 不同胚 (见推论 6.4.3), 二维球面 $\mathbb{S}^2$ 与环面 $\mathbb{T}$ 也不同胚 (见推论 6.4.6). 拓扑学中主要依赖代数工具来解决问题的分支称为*代数拓扑学*.

本章介绍由 Poincaré 定义的基本群概念并研究其性质, 然后应用它来解决一些问题, 包括证明不动点定理、代数基本定理、Jordan 曲线定理和 Brouwer 区域不变性定理等.

对 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$, 记原点 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

6.1　基　本　群

在定义拓扑空间 X 的基本群之前, 先介绍 X 中道路之间的一个等价关系, 称之为 "道路同伦", 并在其商集上定义一种运算, 使之具有代数学中的广群性质.

记 $\mathbb{I} = [0, 1]$ 为单位闭区间.

定义 6.1.1 (L. E. J. Brouwer, 1911)　设 X, Y 是两个拓扑空间, 两个函数 $f, f' : X \to Y$ 连续. 如果存在连续函数 $F : X \times \mathbb{I} \to Y$, 使 $\forall\, x \in X$, $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = f'(x)$, 则称 f *同伦于* f', 记为 $f \simeq f'$. F 称为 f 与 f' 之间的*同伦*, 记为 $f \overset{F}{\simeq} f'$.

同伦可以设想为从 X 到 Y 映射的连续的单参数族 $\{F(\cdot,\ t)\}$, $t\in\mathbb{I}$, F 将 f 连续地 "形变" 为 f'. 对 X 中的两条道路 f, f', 导出 "道路同伦" 的概念.

定义 6.1.2 设 $f, f':\mathbb{I}\to X$ 是两条以 x_0 为起点, x_1 为终点的道路. 如果存在连续映射 $F:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to X$, 使 $\forall\ s,t\in\mathbb{I}$ 有

$$F(s,0)=f(s),\quad F(s,1)=f'(s),\quad F(0,t)=x_0,\quad F(1,t)=x_1,$$

则称 f 与 f' 是**道路同伦的**, 记为 $f\simeq_p f'$. F 称为 f 与 f' 之间的**道路同伦**.

如图 6.1.1. 定义中的条件既说明了 F 是 f 与 f' 之间的同伦, 也说明了 $\forall\ t_0\in\mathbb{I}$, $s\mapsto F(s,t_0)$ 是一条以 x_0 为起点, x_1 为终点的道路.

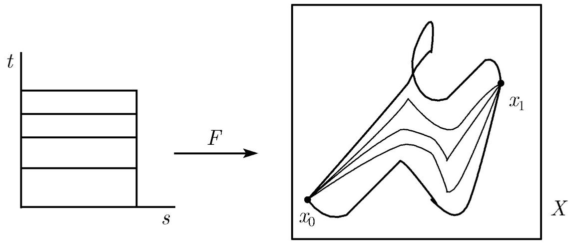


图 6.1.1

引理 6.1.1 关系 $\simeq$ 和 $\simeq_p$ 都是等价关系.

证明 下面仅验证 $\simeq$ 是等价关系, 对道路同伦, 可类似地验证 $\simeq_p$ 是等价关系.

设 X, Y 是两个拓扑空间.

自反性. 对给定的连续函数 $f:X\to Y$, 令 $F:X\times\mathbb{I}\to Y$ 为 $F(x,t)=f(x)$, 则 $f\simeq f$.

对称性. 设 $f\overset{F}{\simeq}f'$. 令 $G:X\times\mathbb{I}\to Y$ 为 $G(x,t)=F(x,1-t)$, 则 $f'\overset{G}{\simeq}f$.

传递性. 设 $f\overset{F}{\simeq}f', f'\overset{F'}{\simeq}f''$. 定义 $G:X\times\mathbb{I}\to Y$ 为

$$G(x,t)=\begin{cases}F(x,2t), & t\in[0,1/2],\\ F'(x,2t-1), & t\in[1/2,1],\end{cases}$$

则映射 G 是确切定义的, 见图 6.1.2. 由于 G 在 $X\times\mathbb{I}$ 的两个闭子空间 $X\times[0,1/2]$, $X\times[1/2,1]$ 上连续, 由粘接引理 (见定理 2.4.4 (5)), G 在 $X\times\mathbb{I}$ 上连续, 于是 $f\overset{G}{\simeq}f''$. □

对道路 f, 用 $[f]$ 记 f 的道路同伦的等价类.

例 6.1.1 任两连续映射 $f,\ g:X\to\mathbb{R}^2$ 是同伦的. 令 $F:X\times\mathbb{I}\to\mathbb{R}^2$ 为 $F(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$, 则 $f\overset{F}{\simeq}g$. 这同伦称为**直线同伦**. 构造 F 的主要条件在于 $\mathbb{R}^2$ 是**凸集**, 即 $\forall\ a,b\in\mathbb{R}^2$, 连接 a 与 b 的直线段包含于 $\mathbb{R}^2$ 中.

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集, 利用直线同伦, 则 A 中从任何 x_0 到 x_1 的两条道路是道路同伦的.

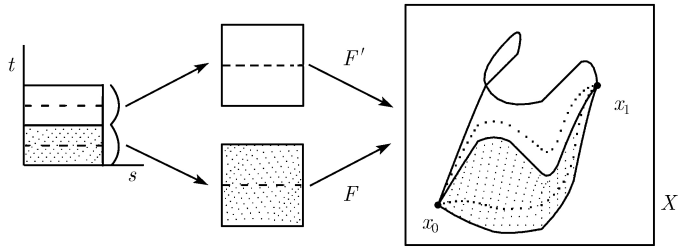


图 6.1.2

例 6.1.2 设 X 为穿孔平面 $\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$. 对 X 中的三条道路 $f,\ g,\ h:\mathbb{I}\to X$, 其中

$$f(s)=(\cos\pi s,\ \sin\pi s),$$
$$g(s)=(\cos\pi s,\ 2\sin\pi s),$$
$$h(s)=(\cos\pi s,\ -\sin\pi s).$$

由直线同伦, $f\simeq_p g$. 在推论 6.3.1 中将说明 $f\not\simeq_p h$. 如果讨论 $f,\ h:\mathbb{I}\to\mathbb{R}^2$, 则 $f\simeq_p h$. 所以像空间对讨论同伦是重要的.

现在把代数方法引入到几何问题的研究中, 在道路同伦类之间定义运算 $*$.

定义 6.1.3 设 f 是拓扑空间 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路, g 是 X 中从 x_1 到 x_2 的一条道路. 定义 f 与 g 的乘积 $f*g$ 为一条道路 $h:\mathbb{I}\to X$, 满足

$$h(s)=\begin{cases} f(2s), & s\in[0,1/2],\\ g(2s-1), & s\in[1/2,1].\end{cases}$$

h 是 X 中从 x_0 到 x_2 的一条道路, 其前半段是 f, 后半段是 g.

道路的乘积运算诱导出道路同伦类上一个定义确切的乘积运算 $[f]*[g]=[f*g]$. 事实上, 设 $f\overset{F}{\simeq}f'$, $g\overset{G}{\simeq}g'$. 置

$$H(s,t)=\begin{cases} F(2s,t), & s\in[0,1/2],\\ G(2s-1,t), & s\in[1/2,1],\end{cases}$$

则 $H:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to X$ 连续, 且 $f*g\overset{H}{\simeq}f'*g'$.

只有当 $f(1)=g(0)$ 时, $[f]*[g]$ 才有定义. 下面将证明 $*$ 运算满足类似于群公理的一些性质.

先规定几个记号或术语. 设 X 是拓扑空间. $\forall\, x\in X$, 常值映射 $e_x:\mathbb{I}\to X$ 定义为 $e_x(\mathbb{I})=\{x\}$. 若 f 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路, 定义 f 的逆 $\overline{f}:\mathbb{I}\to X$ 为 $\overline{f}(s)=f(1-s)$, 则 $\overline{f}$ 是 X 中从 x_1 到 x_0 的一条道路. 如果 $[a,b]$, $[c,d]$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 中的两个区间, 则有唯一的线性映射 $l:[a,b]\to[c,d]$ 满足: $l(a)=c,\ l(c)=d$, 这映射称为**正线性映射**.

定理 6.1.1 运算 $*$ 具有下列性质:

(1) 结合律: 如果 $[f]*([g]*[h])$ 有定义, 则 $([f]*[g])*[h]$ 也有定义, 并且它们相等;

(2) 存在单位元: 若 f 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路, 则

$$[e_{x_0}]*[f]=[f]*[e_{x_1}]=[f];$$

(3) 存在逆元: 若 f 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路, 则

$$[f]*[\overline{f}]=[e_{x_0}],\quad [\overline{f}]*[f]=[e_{x_1}].$$

证明 先指出两个基本事实.

(1.1) 如果函数 $k:X\to Y$ 连续, 且 $f\overset{F}{\simeq}f'$ 是 X 中的道路同伦, 则有 Y 中的道路同伦 $k\circ f\overset{k\circ F}{\simeq}k\circ f'$;

(1.2) 如果函数 $k:X\to Y$ 连续, 且 X 中的两条道路 f, g 满足 $f(1)=g(0)$, 则 $k\circ(f*g)=(k\circ f)*(k\circ g)$.

结合律成立. 给定 X 中的道路 f, g 和 h, 如果 $[f]*([g]*[h])$ 有定义, 则 $f(1)=g(0)$, $g(1)=h(0)$, 于是 $([f]*[g])*[h]$ 也有定义. 设 $0<a<b<1$, 定义 X 中的一条道路 $k_{a,b}$ 如下: 在 $[0,a]$ 上等于从 $[0,a]$ 到 $\mathbb{I}$ 的正线性映射与 f 的复合; 在 $[a,b]$ 上等于从 $[a,b]$ 到 $\mathbb{I}$ 的正线性映射与 g 的复合; 在 $[b,1]$ 上等于从 $[b,1]$ 到 $\mathbb{I}$ 的正线性映射与 h 的复合. 如果 $0<c<d<1$, 则

(1.3) $k_{a,b}\simeq k_{c,d}$.

事实上, 如图 6.1.3, 设 $p:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$ 为三线段道路, 满足 $p(0)=0$, $p(a)=c$, $p(b)=d$, $p(1)=1$, 则 $k_{c,d}\circ p=k_{a,b}$. 让 $i:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$ 是恒等映射, 则存在道路同伦 P 使得 $p\overset{P}{\simeq}i$. 由 (1.1),

$$k_{a,b}\overset{k_{c,d}\circ p}{\simeq}k_{c,d}.$$

易验证, $f*(g*h)=k_{1/2,3/4}$, $(f*g)*h=k_{1/4,1/2}$. 由 (1.3),

$$[f]*([g]*[h])=([f]*[g])*[h].$$

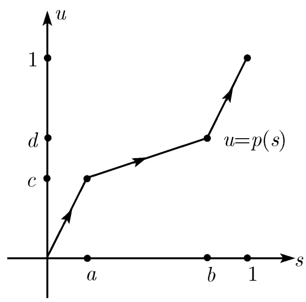


图 6.1.3

单位元的存在性. 设 f 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路. 令 e_0 是 $\mathbb{I}$ 中取常值 0 的道路, $i:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$ 是恒等映射. 则 i 和 e_0*i 都是 $\mathbb{I}$ 中从 0 到 1 的道路, 于是存在 i 和 e_0*i 之间的道路同伦 G. 由 (1.1) 和 (1.2), $f\circ G$ 是 f 与 $f\circ(e_0*i)=(f\circ e_0)*(f\circ i)=e_{x_0}*f$ 之间的道路同伦, 故 $[e_{x_0}]*[f]=[f]$. 类似可证明 $[f]=[f]*[e_{x_1}]$.

逆元的存在性. 设 f 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路. 由于 $i*\overline{i}$ 和 e_0 都是 $\mathbb{I}$ 中以 0 为起点和终点的道路, 存在 $\mathbb{I}$ 中 e_0 与 $i*\overline{i}$ 之间的道路同伦 H. 因此 $f\circ H$

是 $f\circ e_0=e_{x_0}$ 与 $(f\circ i)*(f\circ\bar{i})=f*\overline{f}$ 之间的道路同伦, 即 $[f]*[\overline{f}]=[e_{x_0}]$. 类似地, 可证明 $[\overline{f}]*[f]=[e_{x_1}]$. □

证明结合律的方法可以推广到任意有限条道路的乘积.

定理 6.1.2　设 f 是空间 X 中的一条道路, 又设 $0=a_0<a_0<\cdots<a_n=1$. 定义 $f_i:\mathbb{I}\to X$ 为 $\mathbb{I}$ 到 $[a_{i-1},a_i]$ 的正线性映射与 f 的复合, $1\leqslant i\leqslant n$, 则 $[f]=[f_1]*\cdots*[f_n]$.

X 中所有道路同伦类的集合对乘法 $*$ 只是一个广群.

定义 6.1.4　设 $x_0\in X$. 拓扑空间 X 中以 x_0 作为起点和终点的一条道路称为以 x_0 为*基点*的回路. 所有以 x_0 为基点的回路的道路同伦类之集合对于运算 $*$ 而言构成群, 称为空间 X 关于基点 x_0 的*基本群*, 记作 $\pi_1(X,x_0)$.

同伦是 "连续形变" 这一直观说法的拓扑学定义. Poincaré 运用同伦定义了基本群, 这是第一个用群表述的拓扑不变量. 在同伦论中, 空间 X 的基本群称为 X 的一维同伦群. 1935 年, W. Hurewicz (波, 1904~1956) 定义了高维同伦群 $\pi_n(X,x_0)$, 同伦论迅速成为代数拓扑学的主流. 此后的一段长时期, 代数拓扑学可以被理解为这样一个学科, 许多重要课题来自同伦论, 而它们的解决通常需要借助于可计算性更强的同调论, 并同时将同伦与同调应用于流形理论.

仅有单位元构成的群称为*平凡群*.

例 6.1.3　$\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)$ 是平凡群.

若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为基点的一条回路, 则直线同伦 $F(s,t)=tx_0+(1-t)f(s)$ 是 f 与 e_{x_0} 之间的道路同伦, 于是 $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)=\{[e_{x_0}]\}$.

更一般地, 若 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸子集, 则 $\pi_1(X,x_0)$ 是平凡群. 由于 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球体 $\mathbb{B}^n$ 是凸集, 所以 $\pi_1(\mathbb{B}^n,x_0)$ 是平凡群.

本章的主要目的是介绍一些空间基本群的计算, 并说明它的一些应用. 本节先证明基本群具有下列代数与拓扑性质:

(1) 当 X 是道路连通空间时, 不同基点确定的基本群均同构;

(2) 基本群是拓扑不变量.

定义 6.1.5　设 α 是空间 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路. 映射 $\hat{\alpha}:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$ 定义为 $\hat{\alpha}([f])=[\overline{\alpha}]*[f]*[\alpha]$.

由于 $*$ 是完全确定的, 所以 $\hat{\alpha}$ 也是完全确定的.

定理 6.1.3　映射 $\hat{\alpha}:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$ 是群同构.

证明　(1) $\hat{\alpha}$ 是同态.

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}([f])*\hat{\alpha}([g])&=([\overline{\alpha}]*[f]*[\alpha])*([\overline{\alpha}]*[g]*[\alpha])\\&=[\overline{\alpha}]*[f]*[g]*[\alpha]=\hat{\alpha}([f]*[g]).\end{aligned}$$

(2) $\hat{\alpha}$ 是双射. 记 $\beta=\overline{\alpha}$, 则映射 $\hat{\beta}:\pi_1(X,x_1)\to\pi_1(X,x_0)$, 且对每个 $[h]\in\pi_1(X,x_1)$, 有 $\hat{\beta}([h])=[\overline{\beta}]*[h]*[\beta]=[\alpha]*[h]*[\overline{\alpha}]$, 于是

$$\hat{\alpha}\circ\hat{\beta}([h])=[\overline{\alpha}]*([\alpha]*[h]*[\overline{\alpha}])*[\alpha]=[h],$$

所以 $\hat{\alpha}$ 是满射; 而 $\hat{\beta}\circ\hat{\alpha}([f])=[\alpha]*([\overline{\alpha}]*[f]*[\alpha])*[\overline{\alpha}]=[f]$, 因此 $\hat{\alpha}$ 是单射. □

推论 6.1.1 若 X 是道路连通空间, 且 x_0, $x_1\in X$, 则 $\pi_1(X,x_0)$ 同构于 $\pi_1(X,x_1)$.

空间 X 中含 x_0 的道路连通分支是 X 中含 x_0 的一个极大道路连通子集 (见引理 3.3.1). 设 C 是 X 中含 x_0 的道路连通分支, 则 $\pi_1(X,x_0)=\pi_1(C,x_0)$, 所以 $\pi_1(X,x_0)$ 只依赖于 X 中包含 x_0 的道路连通分支, 并且 $\pi_1(X,x_0)$ 也不反映 X 的其余部分的任何情况. 故当讨论基本群时, 通常只考虑道路连通的空间. 简记空间 X 的基本群为 $\pi_1(X)$. 应当注意的是, 从 x_0 到 x_1 的不同道路可以导出这两个群之间不同的同构, 而 $\pi_1(X,x_0)$ 与 $\pi_1(X,x_1)$ 的同构与道路的选取无关当且仅当基本群是可交换的.

定义 6.1.6 设 X 是道路连通空间. 若存在 $x_0\in X$ 使得 $\pi_1(X,x_0)$ 是平凡群, 则称 X 是*单连通的*, 记 $\pi_1(X,x_0)=0$.

引理 6.1.2 若 X 是单连通空间, 则 X 中任两条有公共起点和终点的道路是道路同伦的.

证明 设 f, g 都是 X 中从 x_0 到 x_1 的道路, 那么 $f*\overline{g}$ 是 X 中以 x_0 为基点的一条回路. 由于 X 是单连通的, 所以 $f*\overline{g}\simeq_p e_{x_0}$, 于是

$$[f]=[f*e_{x_1}]=[f*(\overline{g}*g)]=[(f*\overline{g})*g]=[e_{x_0}*g]=[g],$$

所以 f 和 g 是道路同伦的. □

下面转入证明基本群是拓扑不变量.

对连续映射 $h:X\to Y$, $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 表示 $x_0\in X$ 且 $y_0=h(x_0)$. 如果 f 是 X 中以 x_0 为基点的一条回路, 则 $h\circ f$ 便是 Y 中以 y_0 为基点的一条回路. 于是, $[f]\mapsto[h\circ f]$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 到 $\pi_1(Y,y_0)$ 中的对应.

定义 6.1.7 设映射 $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 连续, 定义 $h_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 为 $h_*([f])=[h\circ f]$. h_* 称为 h (相对于基点 x_0) 的*诱导同态*.

h_* 的定义是完全确定的. 因为如果在 X 中, $f\overset{F}{\simeq}_p f'$, 那么 $h\circ f\overset{h\circ F}{\simeq}_p h\circ f'$. 又因为 $(h\circ f)*(h\circ g)=h\circ(f*g)$, 所以 $h_*([f]*[g])=h_*([f])*h_*([g])$, 于是 h_* 是同态.

诱导同态 h_* 也依赖于基点 x_0. 对同一个 h, 及 X 中不同的 x_0,x_1, 我们记 $(h_{x_0})_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$, 和 $(h_{x_1})_*:\pi_1(X,x_1)\to\pi_1(Y,y_1)$. 如果仅考虑一个基点, 则常简单地用 h_* 表示诱导同态.

定理 6.1.4 (函子性质) 设 $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$, $k:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$ 都是连续映射, 则 $(k\circ h)_*=k_*\circ h_*$. 如果 $i:(X,x_0)\to(X,x_0)$ 是恒等映射, 则 i_* 是恒等同态.

证明 由定义, $(k\circ h)_*([f])=[k\circ h\circ f]=k_*([h\circ f])=k_*(h_*([f]))=(k_*\circ h_*)([f])$. 此外, $i_*([f])=[i\circ f]=[f]$. □

推论 6.1.2 设 $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 是同胚, 则 $h_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 是同构.

证明 让 $k=h^{-1}:(Y,y_0)\to(X,x_0)$, 令 i, i' 分别是空间 X, Y 上的恒等映射. 由定理 6.1.4, $k_*\circ h_*=(k\circ h)_*=i_*$, $h_*\circ k_*=(h\circ k)_*=i'_*$, 所以 k_* 是 h_* 的逆, 即 h_* 是同构. □

不论同伦或同调, 从几何向代数的过渡总是由函子来实现的. 即对每个拓扑空间 X, 对应群 $F(X)$, 对每个连续映射 $f:X\to Y$, 对应同态 $F(f):F(X)\to F(Y)$, 且满足: ① 当 $X=Y$ 且 $f=i_X$ 时, $F(f)$ 是恒等同构; ② 若连续函数 $g:Y\to Z$, 则 $F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$. 当 $f:X\to Y$ 为同胚时, $F(f):F(X)\to F(Y)$ 为同构. 证明两个拓扑空间 X 与 Y 不同胚的一个常用方法就是找出一个适当的函子 F, 使得 $F(X)$ 不同构于 $F(Y)$.

习 题 6.1

6.1.1 如果 f, $f':X\to Y$ 是同伦的, 并且 g, $g':Y\to Z$ 也是同伦的, 则 $f\circ g$ 和 $f'\circ g'$ 是同伦的.

6.1.2 设 f, $g:X\to\mathbb{S}^n$ 都是连续映射, 满足对每个 $x\in X$ 有 $f(x)\neq -g(x)$, 则 f 同伦于 g.

6.1.3 证明: Möbius 带同伦于 $\mathbb{S}^1$.

6.1.4 设 α, β 分别是拓扑空间 X 中从 x_0 到 x_1, 从 x_1 到 x_2 的道路. 证明: 如果 $\gamma=\alpha*\beta$, 则 $\hat{\gamma}=\hat{\beta}\circ\hat{\alpha}$.

6.1.5 设 x_0 和 x_1 是道路连通空间 X 中的两点. 证明: $\pi_1(X,x_0)$ 是交换群当且仅当对任意两条从 x_0 到 x_1 的道路 α 和 β, 有 $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$.

6.1.6 证明: 若 X 是道路连通空间, 则在不区别所涉及的群之间的同构的前提下, 连续映射的诱导同态与基点的选取无关. 即, 设 $h:X\to Y$ 是连续的, 且 $h(x_0)=y_0$, $h(x_1)=y_1$. 如果 α 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路, 令 $\beta=h\circ\alpha$, 则

$$\hat{\beta}\circ(h_{x_0})_*=(h_{x_1})_*\circ\hat{\alpha}.$$

6.2 覆 叠 空 间

覆叠空间是计算基本群的有效工具. 本节的目的是通过道路及道路同伦的提

升, 建立覆叠空间与基本群的联系, 并计算圆周的基本群.

定义 6.2.1 设 $p: E \to B$ 是连续满射, U 是 B 的开集. 如果 $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in J} V_\alpha$, 其中 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是 E 中互不相交的开集族且每个 $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \to U$ 是同胚, 则称 p *均衡地覆盖* U. 集族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 称为 $p^{-1}(U)$ 的*片状分拆*.

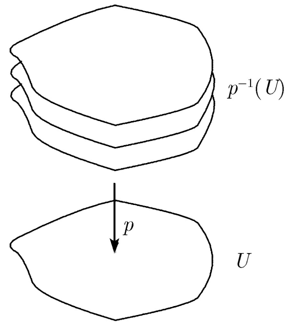


图 6.2.1

在几何上, 常将 $p^{-1}(U)$ 画成悬在 U 上方的 "一叠薄饼", 每一片 "薄饼" 都和 U 的大小形状相同, 而映射 p 将 "薄饼" 挤压到 U 上, 见图 6.2.1.

定义 6.2.2 设 $p: E \to B$ 是连续满射. 若任给 $b \in B$, 存在 b 的开邻域 U, 使 p 均衡地覆盖 U, 则称 p 为*覆叠映射*, E 称为 B 的*覆叠空间*.

易验证, 覆叠映射是开映射 (见习题 6.2.1). 此外, 由于每个 $V_\alpha \cap p^{-1}(b)$ 是单点集, 所以子空间 $p^{-1}(b)$ 具有离散拓扑.

例 6.2.1 对拓扑空间 X 和 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令 $E_n = X \times \{1, 2, \cdots, n\}$. 定义 $p: E_n \to X$ 为投射 $p(x, i) = x$, 则 p 是覆叠映射. 只需取定义 6.2.2 中的 $U = X$.

为了避开这类简单的叠饼式的覆叠空间, 常要求覆叠空间是道路连通空间.

定理 6.2.1 映射 $p: \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 定义为 $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$, 则 p 是覆叠映射.

直观上, p 把直线 $\mathbb{R}$ 绕在单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 上, 每一线段 $[n, n+1]$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上绕一圈.

证明 先讨论 $\mathbb{S}^1$ 的右半开圆周. 令 $U = \{p(x) \in \mathbb{S}^1 : \cos 2\pi x > 0\}$. 因为

$$\cos 2\pi x > 0 \Leftrightarrow 2n\pi - \frac{\pi}{2} < 2\pi x < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n - \frac{1}{4} < x < n + \frac{1}{4}.$$

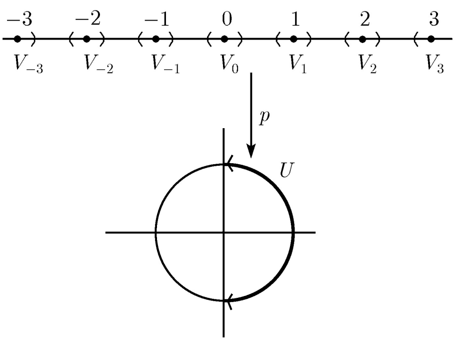


图 6.2.2

令 $V_n = (n - 1/4, \ n + 1/4)$, 则 $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, 且 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{R}$ 中互不相交的开集族, 见图 6.2.2. 下证每个 $p|_{V_n}: V_n \to U$ 是同胚. 由于严格单调性及紧性, $p|_{\overline{V}_n}: \overline{V}_n \to \overline{U}$ 是同胚, 从而 $p|_{V_n}: V_n \to U$ 是同胚, 所以 p 均衡地覆盖 U.

若再分别考虑 $\mathbb{S}^1$ 的上半开圆周、左半开圆周和下半开圆周, 则均可类似地证明 p 均衡地覆盖它们. 故 $p: \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 是覆叠映射. □

定理 6.2.1 中的覆叠映射 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 称为标准覆叠映射.

定义 6.2.3　映射 $p:E\to B$ 称为局部同胚的, 若对每个 $e\in E$, 存在 e 的开邻域 V 和 B 的开集 U 使 $p|_V:V\to U$ 是同胚.

显然, 如果 $p:E\to B$ 是覆叠映射, 则 p 是局部同胚的. 反之不然.

例 6.2.2　令 $E=(0,+\infty)$. 映射 $p:E\to\mathbb{S}^1$ 定义为 $p(x)=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x)$. 则 p 是局部同胚的满射, 但是 p 不是覆叠映射.

对 $b_0=(1,0)\in\mathbb{S}^1$, 若存在 b_0 在 $\mathbb{S}^1$ 中的开邻域 U 使得 p 均衡地覆盖 U, 设 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $p^{-1}(U)$ 的片状分拆, 其中每个 $n\in V_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, 则存在 $\varepsilon>0$ 使 $V_0=(0,\varepsilon)$, 但是 $p|_{V_0}:V_0\to U$ 不是同胚.

例 6.2.3　环面的覆叠空间 [9].

在例 2.6.2 的 (1) 中, 环面是由正方形黏合的轮胎状的商空间 I^2/R. 在解析几何中, 环面是圆周绕在同一个平面上的轴 (但与圆周不相交) 旋转而得的旋转面 D, 它是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间, 见图 6.2.3. 例如, yz 平面上圆周 $(y-2)^2+z^2=1$ 绕 z 轴旋转而得 D 的参数方程为

$$\begin{aligned}&x=(2+\cos 2\pi s)\cos 2\pi t,\\&y=(2+\cos 2\pi s)\sin 2\pi t,\quad \text{其中 } 0\leqslant s,\ t\leqslant 1.\\&z=\sin 2\pi s,\end{aligned}$$

但在拓扑学中, 常将环面看作乘积空间 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$, 它是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间. 先证明商空间 I^2/R, 旋转面 D 及 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ 是相互同胚的. 记

$$\begin{aligned}D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: &x=(2+\cos 2\pi s)\cos 2\pi t,\\ &y=(2+\cos 2\pi s)\sin 2\pi t,\ z=\sin 2\pi s,\ 0\leqslant s,t\leqslant 1\}\end{aligned}$$

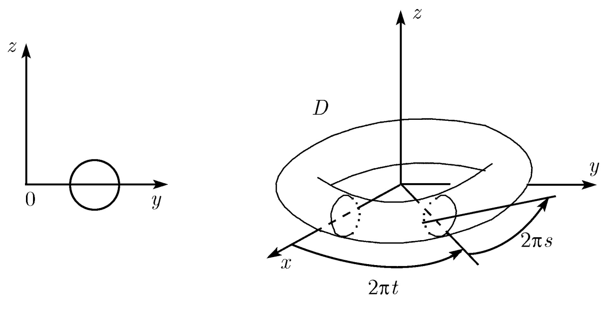


图 6.2.3

定义映射 $g:I^2\to D$ 为 $g(s,t)=(x,y,z)$, $\forall\,(s,t)\in I^2$. 显然, g 是连续的满射. 由于 I^2 是紧空间, 所以 g 还是闭映射 (见定理 3.6.7). 因为 $g(s,0)=g(s,1)$, $g(0,t)=$

$g(1,t)$, 所以由 g 确定的 I^2 中的等价关系 R_g 就是例 2.6.2 的 (1) 中定义的等价关系 R, 即 $R = R_g$. 由定理 2.6.6, 由 g 诱导同胚映射 $f : I^2/R_g \to D$, 满足 $f([(s,t)]) = g(s,t)$, $\forall\ (s,t) \in I^2$.

另一方面, 定义映射 $g' : I^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 为 $g'(s,t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t})$, $\forall\ (s,t) \in I^2$. 易见, g' 是商映射, 且 $g'(s,0) = g'(s,1)$, $g'(0,t) = g'(1,t)$, 于是 $R = R_{g'}$. 因此, 诱导出同胚映射 $f' : I^2/R_{g'} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

综上所述, 商空间 I^2/R, 旋转面 D 及 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 是相互同胚的. $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 称为*环面*. 下面再来求环面 $\mathbb{T}$ 的覆叠空间.

设映射 $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 如定理 6.2.1 中的标准覆叠映射. *乘积映射* $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 定义为 $p \times p(x,y) = (p(x), p(y))$. 易验证, 两个覆叠映射的乘积映射仍是覆叠映射 (见习题 6.2.3), 所以 $p \times p$ 是以平面 $\mathbb{R}^2$ 为覆叠空间的覆叠映射. 它将每个单位正方形 $[n, n+1] \times [m, m+1]$ 盖满环面.

下面建立覆叠空间与基本群之间的联系. 关于覆叠空间最重要的事实, 是所谓的道路提升和同伦提升定理. 经过一系列的工作, 1934 年, H. Seifert, W. Threlfall 以提升定理为基础透彻地给出了基本群和覆叠空间之间的关系.

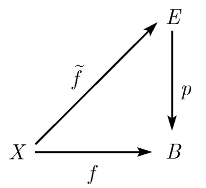


图 6.2.4

定义 6.2.4 设连续映射 $p : E \to B$ 和 $f : X \to B$. 连续映射 $\tilde{f} : X \to E$ 称为 f 的*提升*, 如果 $p \circ \tilde{f} = f$, 即有交换图, 见图 6.2.4.

先看几个提升的例子.

例 6.2.4 对定理 6.2.1 定义的覆叠映射 $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, 以 $b_0 = (1,0)$ 为起点,

(1) 定义 $f : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ 为 $f(s) = (\cos \pi s,\ \sin \pi s)$, 则 f 的提升 $\tilde{f} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ 为 $\tilde{f}(s) = s/2$.

(2) 定义 $g : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ 为 $g(s) = (\cos \pi s,\ -\sin \pi s)$, 则 g 的提升 $\tilde{g} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ 为 $\tilde{g}(s) = -s/2$.

(3) 定义 $h : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ 为 $h(s) = (\cos 4\pi s,\ \sin 4\pi s)$, 则 h 的提升 $\tilde{h} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ 为 $\tilde{h}(s) = 2s$.

这些例子反映了覆叠映射与提升的关系：当 p 是覆叠映射时, $\mathbb{S}^1$ 中以 b_0 为起点的道路在 $\mathbb{R}$ 中有以 0 为起点的提升.

引理 6.2.1 设 $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ 是覆叠映射, 则任意以 b_0 为起点的一条道路 $f : \mathbb{I} \to B$, 在 E 中有以 e_0 为起点的唯一道路 $\tilde{f}$ 作为 f 的提升.

证明 由于 p 是覆叠映射, 存在 B 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 使得 p 均衡地覆盖 $\mathscr{U}$ 的每一元, 则紧度量空间 $\mathbb{I}$ 的开覆盖 $f^{-1}(\mathscr{U})$ 具有 Lebesgue 数 (见推论 4.1.4), 所以存在 $\mathbb{I}$ 的分划 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$, 使得每个 $f([s_i, s_{i+1}])$ 包含于 $\mathscr{U}$ 中的某一元内.

(1) $\tilde{f}$ 的存在性. 从 s_0 开始逐段构造提升 $\tilde{f}:\mathbb{I}\to E$. 定义 $\tilde{f}(0)=e_0$. 设 $\tilde{f}$ 在 $[0,s_i]$ 上已经定义. $\tilde{f}$ 在 $[s_i,s_{i+1}]$ 上定义如下：存在 $U\in\mathscr{U}$ 使 $f([s_i,s_{i+1}])\subset U$. 设 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为 $p^{-1}(U)$ 的片状分拆, 存在 $\alpha_0\in J$ 使 $\tilde{f}(s_i)\in V_{\alpha_0}$. 由于 $p|_{V_{\alpha_0}}:V_{\alpha_0}\to U$ 是同胚, 当 $s\in[s_i,s_{i+1}]$ 时, 定义 $\tilde{f}(s)=(p|_{V_{\alpha_0}})^{-1}(f(s))$, 则 $\tilde{f}$ 在 $[s_i,s_{i+1}]$ 上连续. 继续上述过程, 定义 $\tilde{f}:\mathbb{I}\to E$. 由粘接引理 (见定理 2.4.4) 及 $\tilde{f}$ 的定义, $\tilde{f}$ 连续, 且 $p\circ\tilde{f}=f$.

(2) $\tilde{f}$ 的唯一性. 设 $\check{f}$ 是以 e_0 为起点的 f 的另一个提升, 则 $\check{f}(0)=e_0=\tilde{f}(0)$. 设在 $[0,s_i]$ 上 $\tilde{f}=\check{f}$. 对 $[s_i,s_{i+1}]$, U 及 V_α 的含义如 (1), 由于 $p\circ\check{f}=f$, 所以

$$\check{f}([s_i,s_{i+1}])\subset p^{-1}\circ f([s_i,s_{i+1}])\subset p^{-1}(U)=\bigcup_{\alpha\in J}V_\alpha.$$

因为 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是互不相交的开集族且 $\check{f}([s_i,s_{i+1}])$ 连通, 所以 $\check{f}([s_i,s_{i+1}])$ 仅含在某一 V_α 内, 而 $\check{f}(s_i)=\tilde{f}(s_i)\in V_{\alpha_0}$, 从而 $\check{f}([s_i,s_{i+1}])\subset V_{\alpha_0}$. 由 $p|_{V_{\alpha_0}}:V_{\alpha_0}\to U$ 是同胚, 对每个 $s\in[s_i,s_{i+1}]$, $\check{f}(s)=(p|_{V_{\alpha_0}})^{-1}(f(s))=\tilde{f}(s)$. 故在每个 $[s_i,s_{i+1}]$ 上, $\tilde{f}=\check{f}$. 因此在 $\mathbb{I}$ 上 $\tilde{f}=\check{f}$. □

道路同伦同样有唯一的提升.

引理 6.2.2　设 $p:(E,e_0)\to(B,b_0)$ 是覆叠映射, 又设映射 $F:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to B$ 连续, $F(0,0)=b_0$, 则 F 存在唯一的提升 $\tilde{F}:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to E$ 使 $\tilde{F}(0,0)=e_0$. 如果 F 是道路同伦, 则 $\tilde{F}$ 也是道路同伦.

证明　证明类似于引理 6.2.1, 把 $\mathbb{I}$ 变为 $\mathbb{I}\times\mathbb{I}$ 时, 改逐段提升为逐片提升.

因为 p 是覆叠映射, 存在 B 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 使得 p 均衡地覆盖 $\mathscr{U}$ 的每一元. 由 Lebesgue 数引理, 存在 $\mathbb{I}$ 的两个分划

$$0=s_0<s_1<\cdots<s_m=1,\quad 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1,$$

使得每一矩形 $I_{ij}=[s_{i-1},s_i]\times[t_{j-1},t_j]$ 在 F 的像含于 $\mathscr{U}$ 的某一元内. 为了方便起见, 记矩形 $I_{ij}\prec I_{i_0j_0}$, 如果 $j<j_0$, 或者 $j=j_0$ 且 $i<i_0$.

(1) $\tilde{F}$ 的存在性. 从点 $(0,0)$ 开始逐块构造提升 $\tilde{F}:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to E$. 定义 $\tilde{F}(0,0)=e_0$. 利用引理 6.2.1, 可以设 $\tilde{F}$ 在左边 $\{0\}\times\mathbb{I}$, 底边 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 上已经定义. 一般地, 如图 6.2.5 所示, 对给定的 i_0,j_0, 让

$$A=(\cup\{I_{ij}:I_{ij}\prec I_{i_0j_0}\})\cup(\{0\}\times\mathbb{I})\cup(\mathbb{I}\times\{0\}).$$

假设 $\tilde{F}$ 在 A 上已经定义且是 $F|_A$ 的提升, $\tilde{F}$ 在 $I_{i_0j_0}$ 上定义如下：存在 $U\in\mathscr{U}$ 使 $F(I_{i_0j_0})\subset U$. 设 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 $p^{-1}(U)$ 的片状分拆. 让 $C=A\cap I_{i_0j_0}$, 则 $\tilde{F}$ 在连通集 C 上有定义, 于是 $\tilde{F}(C)$ 是连通的, 所以存在 $\beta\in J$ 使得 $\tilde{F}(C)\subset V_\beta$. 由于 $p_0=p|_{V_\beta}:V_\beta\to U$ 是同胚的, 且 $\forall\ x\in C$, 有 $p_0(\tilde{F}(x))=p(\tilde{F}(x))=F(x)$, 所以

$\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$. 于是 $\forall\, x \in I_{i_0 j_0}$, 定义 $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$, 则 $\tilde{F}$ 连续扩张到 $I_{i_0 j_0}$ 上且 $p \circ \tilde{F} = F$. 依此, 可在 $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 上定义 $\tilde{F}$. 由上述构造, $\tilde{F}$ 连续且 $p \circ \tilde{F} = F$.

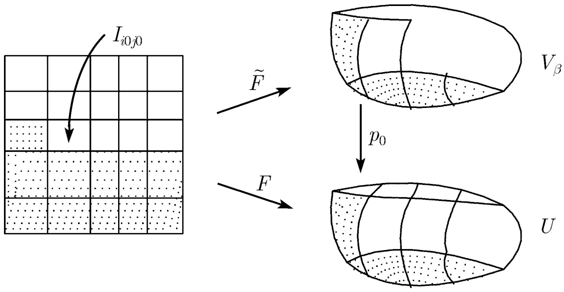


图 6.2.5

(2) $\tilde{F}$ 的唯一性. 注意到 $\tilde{F}$ 的构造步骤, 先在 (0, 0) 上定义, 其次在 $\{0\} \times \mathbb{I}$, $\mathbb{I} \times \{0\}$ 上定义, 再次在每个 I_{ij} 上定义. 为保持 $\tilde{F}$ 的连续性, 每一步仅有唯一的定义方式, 所以只要 $\tilde{F}(0,0)$ 确定了, $\tilde{F}$ 就完全确定了.

(3) 设 F 是道路同伦, 则 $F(\{0\} \times \mathbb{I}) = \{b_0\} \subset B$. 因为 $\tilde{F}$ 是 F 的提升, 于是 $\tilde{F}(\{0\} \times \mathbb{I}) \subset p^{-1}(b_0)$. 由于 $p^{-1}(b_0)$ 具有离散拓扑且 $\tilde{F}(\{0\} \times \mathbb{I})$ 是连通的, 所以 $\tilde{F}(\{0\} \times \mathbb{I})$ 是单点集. 同理, $\tilde{F}(\{1\} \times \mathbb{I})$ 也是单点集. 从而, $\tilde{F}$ 是道路同伦的. □

下述定理是定义覆叠映射的诱导提升对应的基础.

定理 6.2.2 设 $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$ 是覆叠映射, 又设 f, g 都是 B 中从 b_0 到 b_1 的道路, $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ 分别是 f, g 在 E 中以 e_0 为起点的提升. 如果 $f \simeq_p g$, 则 $\tilde{f} \simeq_p \tilde{g}$ 且 $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.

证明 设 $f \overset{F}{\simeq}_p g$, 则 $F(0,0) = b_0$. 由引理 6.2.2, F 存在唯一的道路同伦提升 $\tilde{F}: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to E$ 且 $\tilde{F}(0,0) = e_0$, 于是 $\tilde{F}(\{0\} \times \mathbb{I}) = \{e_0\}$, $\tilde{F}(\{1\} \times \mathbb{I}) = \{e_1\}$. 因为 $F(s,0) = f(s)$ 且 $F(s,1) = g(s)$, 由提升的唯一性, $\tilde{F}(s,0) = \tilde{f}(s)$ 且 $\tilde{F}(s,1) = \tilde{g}(s)$, 所以 $\tilde{f} \overset{\tilde{F}}{\simeq}_p \tilde{g}$ 且 $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. □

定义 6.2.5 设 $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$ 是覆叠映射, 定义 $\varphi: \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ 为 $\varphi([f]) = \tilde{f}(1)$, 其中对 $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, $\tilde{f}$ 是 f 在 E 中以 e_0 为起点的提升. 称 φ 为由 p 诱导的**提升对应**.

φ 不仅依赖于 p, 也依赖于 e_0 的选择.

定理 6.2.3 设 $\varphi: \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ 是由覆叠映射 $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$ 诱导的提升对应. 若 E 是道路连通的, 则 φ 是满射. 若 E 是单连通的, 则 φ 是双射.

证明 设 E 是道路连通的, 则 $\forall\, e_1 \in p^{-1}(b_0)$, 存在 E 中从 e_0 到 e_1 的一条道路 $\tilde{f}$. 令 $f = p \circ \tilde{f}$, 则 f 是 B 中以 b_0 为基点的一条回路, $\tilde{f}$ 是 f 的提升, 所以 $[f] \in \pi_1(B, b_0)$ 且 $\varphi([f]) = e_1$. 故 φ 是满射.

设 E 是单连通的. 若 $[f]$, $[g] \in \pi_1(B, b_0)$ 且 $\varphi([f]) = \varphi([g])$, 让 $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ 分别是 f, g 在 E 中以 e_0 为起点的提升, 那么 $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. 因为 E 是单连通的, 由引理 6.1.2, 存在 $\tilde{f}$ 与 $\tilde{g}$ 之间的道路同伦 $\tilde{F}$, 那么 $p \circ \tilde{F}$ 是 B 中 f 与 g 之间的道路同伦, 所以 $[f] = [g]$. 故 φ 是双射. □

定理 6.2.4 圆周 $\mathbb{S}^1$ 的基本群同构于整数加群.

证明 令 $b_0 = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$, 下面证明 $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$ 同构于 $(\mathbb{Z}, +)$. 设 $p : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{S}^1, b_0)$ 是标准的覆叠映射 (见定理 6.2.1), 则 $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$. 因为 $\mathbb{R}$ 是单连通的, 由定理 6.2.3, 提升对应 $\varphi : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \to \mathbb{Z}$ 是双射. 下面证明 φ 是同态.

设 f, g 都是 $\mathbb{S}^1$ 中以 b_0 为基点的回路, 要证明 $\varphi([f*g]) = \varphi([f]) + \varphi([g])$. 让 $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ 分别是 f, g 在 $\mathbb{R}$ 中以 0 为起点的提升, 记 $n = \tilde{f}(1) = \varphi([f])$, 且 $m = \tilde{g}(1) = \varphi([g])$. 定义 $\breve{g} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ 为 $\breve{g}(s) = n + \tilde{g}(s)$, 那么 $p \circ \breve{g}(s) = p(n + \tilde{g}(s)) = p \circ \tilde{g}(s) = g(s)$, 于是 $\breve{g}$ 是 g 的以 n 为起点的提升. 令 $h = \tilde{f} * \breve{g}$, 则 h 是 $\mathbb{R}$ 中以 0 为起点的道路且 $p \circ h = f * g$, 所以 h 是 $f * g$ 的以 0 为起点的提升, 从而

$$\varphi([f * g]) = h(1) = \breve{g}(1) = n + m = \varphi([f]) + \varphi([g]).$$ □

由此, $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ 是无限循环群.

习 题 6.2

6.2.1 设 $p : E \to B$ 是覆叠映射. 证明: p 是开映射. 试问: 局部同胚映射是否是开映射?

6.2.2 设 $p : E \to B$ 是覆叠映射. 令

$$\mathscr{B} = \{U : U \text{ 是 } B \text{ 的开集且 } p \text{ 均衡地覆盖 } U\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是空间 B 的基.

6.2.3 设 $p : E \to B$ 和 $p' : E' \to B'$ 都是覆叠映射, 则乘积映射 $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ 也是覆叠映射.

6.2.4 设 $p : E \to B$ 是覆叠映射, α, β 是 B 中的道路, 满足 $\alpha(1) = \beta(0)$. 如果 $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ 分别是 α, β 的提升且 $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$, 证明 $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ 是 $\alpha * \beta$ 的提升.

6.2.5 设 $p : E \to B$ 是覆叠映射, 其中 E 是道路连通的. 证明: 当 B 单连通时, p 必定是同胚.

6.2.6 设 $p : E \to B$ 是覆叠映射. 若对每个 $b \in B$, $p^{-1}(b)$ 是紧子集, 则 p 是闭映射.

6.3 收缩与同伦等价

本节讨论 $\mathbb{S}^1$ 的基本群的一些应用, 内容涉及收缩、形变收缩和同伦等价, 将计算穿孔平面的基本群, 导出二维 Brouwer 不动点定理.

定义 6.3.1 (K. Borsuk, 1931) 设 A 是空间 X 的子空间. 连续映射 $r: X \to A$ 称为收缩, 如果 $r|_A: A \to A$ 是恒等映射. 这时, A 称为 X 的收缩核.

引理 6.3.1 如果 A 是空间 X 的收缩核, 则内射 $j: A \to X$ 诱导的基本群同态是单射.

证明 设 $r: X \to A$ 是收缩映射, 那么 $r \circ j: A \to A$ 是 A 上的恒等映射. 取定 $a \in A$, 则 $r_* \circ j_*$ 是基本群 $\pi_1(A, a)$ 上的恒等同构, 所以 j_* 是单射. □

定理 6.3.1 $\mathbb{S}^1$ 不是 $\mathbb{B}^2$ 的收缩核.

证明 设存在收缩映射 $r: \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$, 则内射 $j: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{B}^2$ 的诱导同态是单射. 由于 $\mathbb{B}^2$ 的基本群是平凡群, 所以 $\mathbb{S}^1$ 的基本群也是平凡群, 矛盾. □

定义 6.3.2 设 A 是空间 X 的子空间. 连续映射 $H: X \times \mathbb{I} \to X$ 称为形变收缩, 如果

(1) 对每个 $x \in X$, $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) \in A$;

(2) 对每个 $a \in A$, $t \in \mathbb{I}$, $H(a, t) = a$.

这时, A 称为 X 的形变收缩核.

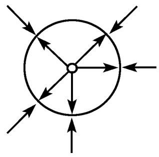


图 6.3.1

在形变收缩中, 如图 6.3.1 所示, X 能连续地形变到 A 中, 若定义 $r: X \to A$ 为 $r(x) = H(x, 1)$, 则 r 就是 X 到 A 上的收缩, 且 $i_X \overset{H}{\simeq} j \circ r$, 其中 $j: A \to X$ 是内射.

引理 6.3.2 设两个映射 $h, k: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 都连续. 如果 $h \overset{H}{\simeq} k$ 且对每个 $t \in \mathbb{I}$ 有 $H(x_0, t) = y_0$, 则诱导同态 $h_* = k_*$.

证明 如果 f 是 X 中以 x_0 为基点的一条回路, 令 $G = H \circ (f \times i): \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to Y$, 其中 $i: \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 是恒等映射, 则 G 连续且

$$G(s, 0) = h \circ f(s), \quad G(s, 1) = k \circ f(s),$$
$$G(0, t) = H(x_0, t) = y_0, \quad G(1, t) = H(x_0, t) = y_0,$$

所以 $h \circ f \overset{G}{\simeq}_p k \circ f$, 即 $h_*([f]) = k_*([f])$. □

定理 6.3.2 如果 A 是空间 X 的形变收缩核, 则内射 $j: A \to X$ 诱导出基本群的同构.

证明 设 $H: X \times \mathbb{I} \to X$ 是形变收缩. 定义 $r: X \to A$ 为 $r(x) = H(x, 1)$, 并取定 $a_0 \in A$. 由引理 6.3.1, 诱导同态 $j_*: \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ 是单射. 下面证明 j_* 还是满射. 对恒等映射 $i: X \to X$, 有 $j \circ r \overset{H}{\simeq} i$, 且对每个 $t \in \mathbb{I}$ 有 $H(a_0, t) = a_0$, 由引理 6.3.2, $(j \circ r)_* = j_* \circ r_*$ 是 $\pi_1(X, a_0)$ 上的恒等同构, 所以 $j_*: \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ 是满射. □

定理 6.3.2 可以将一些空间基本群的计算化为已知的空间的基本群. 如下述推论表明, 通过 $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ 可计算穿孔平面的基本群.

推论 6.3.1　对 $n \in \mathbb{Z}_+$, 内射 $j : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ 诱导出基本群的同构.

证明　令 $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$. 定义 $H : X \times \mathbb{I} \to X$ 为

$$H(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{\|x\|},$$

则 H 连续, $H(x,0) = x$, $H(x,1) \in \mathbb{S}^n$, 且对每个 $a \in \mathbb{S}^n$, $H(a,t) = a$, 所以 H 是形变收缩, $\mathbb{S}^n$ 是 X 的形变收缩核. 由定理 6.3.2, $j_* : \pi_1(\mathbb{S}^n, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ 是同构. □

推论 6.3.1 的几何意义是指, 有一个自然的方式将 $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ 中的每一条道路 f 形变为 $\mathbb{S}^1$ 中的一条道路, 即可以通过每一条以 $\mathbf{0}$ 为起点的射线把 $f(x)$ 收缩到 $\mathbb{S}^1$ 上. 由定理 6.2.4, $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\})$ 同构于整数加群, 这表明在例 6.1.2 中 $f \not\simeq_p h$.

例 6.3.1　设 B 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 z 轴, 则穿孔的 xy 平面 $(\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}) \times \{0\}$ 是 $\mathbb{R}^3 - B$ 的形变收缩核.

定义 $H(x,y,z,t) = (x,y,(1-t)z)$, 则 $H : (\mathbb{R}^3 - B) \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3 - B$ 是形变收缩. 由推论 6.3.1, $\pi_1(\mathbb{R}^3 - B)$ 与 $(\mathbb{Z}, +)$ 同构.

本节的第二部分将基本群用于研究拓扑学中的另一类问题: 确定从一个空间到另一个空间两个给定的映射是否同伦. 这问题分为两类, 一是给定映射 $h : X \to Y$, h 是否同伦于常值映射; 二是如何确定两个映射 h, $k : X \to Y$ 是否同伦?

定义 6.3.3　如果映射 $h : X \to Y$ 同伦于常值映射, 则称 h 是**零伦的**.

引理 6.3.3　设 $h : \mathbb{S}^1 \to Y$ 是连续映射. 下述条件等价:

(1) h 是零伦的;

(2) h 能扩张为连续映射 $g : \mathbb{B}^2 \to Y$;

(3) h_* 是零同态.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 设 $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to Y$ 是 h 与常值映射之间的同伦. 定义 $\pi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{B}^2$ 为 $\pi(x,t) = (1-t)x$, 则 π 是连续满射. 由于 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ 是紧空间, π 是闭映射 (见定理 3.6.7). 定义 $g : \mathbb{B}^2 \to Y$ 为 $g(x) = H(\pi^{-1}(x))$, 则 g 是确切定义的. 当 $x = 0$ 时, $\pi^{-1}(x) = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$, 则 $H(\mathbb{S}^1 \times \{1\})$ 是 Y 中的单点集, 且 $g \circ \pi = H$. 若 C 是 Y 中的闭集, 则 $g^{-1}(C) = \pi(H^{-1}(C))$ 是 $\mathbb{B}^2$ 中的闭集, 所以 g 连续; 另一方面, 若 $x \in \mathbb{S}^1$, 则 $g(x) = H(\pi^{-1}(x)) = H(x,0) = h(x)$, 故 g 是 h 的扩张.

(2) $\Rightarrow$ (3). 让 $j : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{B}^2$ 是内射, 则 $g \circ j = h$. 由诱导同态的函子性质, $h_* = g_* \circ j_*$. 因为 $\mathbb{B}^2$ 的基本群是平凡群, 取定 $b_0 \in \mathbb{S}^1$, 所以 $j_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \to \pi_1(\mathbb{B}^2, b_0)$ 是平凡的, 因此 h_* 是零同态.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 是标准的覆叠映射, $p_0 = p|_{\mathbb{I}} : \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$, $b_0 = (1,0) \in \mathbb{S}^1$. 则 $[p_0] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$. 由于 h_* 是零同态, 让 $y_0 = h(b_0)$, 则 Y 中以 y_0 为基点的回路 $f = h \circ p_0$ 与常值道路 e_{y_0} 同伦, 设 F 是其同伦映射. 令 $q = p_0 \times i_{\mathbb{I}}$, 则 $q : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ 是连续的闭映射. 定义 $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to Y$ 为 $H(x,t) = F(q^{-1}(x,t))$,

则映射 H 是确切定义的且 $F = H\circ q$. 由于 q 是闭映射, 所以 H 连续, 从而 $h \overset{H}{\simeq}_p e_{y_0}$, 故 h 是零伦的. □

定理 6.3.3 设 $h: X \to Y$ 是零伦的, 则 h_* 是零同态.

证明 设 $f: \mathbb{I} \to X$ 是 X 中以 x_0 为基点的一条回路, 要证 $h_*([f]) = 0$. 令 $\varphi: \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ 为标准回路 $\varphi(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. 定义 $k: \mathbb{S}^1 \to X$ 为 $k(a) = f(\varphi^{-1}(a))$ (由于 f 是 x_0 的基点, 在 $(1, 0)$ 点, k 是完全确定的), 因为 $f = k\circ\varphi$ 且 φ 是闭映射, 于是 k 是连续的 (见定理 2.6.5). 设 $H: X \times \mathbb{I} \to Y$ 是 h 与常值映射之间的同伦, 则 $H': \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to Y$ 定义为 $H'(a, t) = H(k(a), t)$ 是 $h\circ k$ 与常值映射之间的同伦. 由引理 6.3.3, $(h\circ k)_*$ 是零同态, 于是 $0 = (h\circ k)_*([\varphi]) = [h\circ k\circ\varphi] = [h\circ f] = h_*([f])$. 故 h_* 是零同态. □

例 6.3.2 设 T 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭三角区域, 则不存在连续映射 $f: T \to \partial T$ 使得 T 的每一边变为自身.

设存在连续映射 $f: T \to \partial T$ 使得 T 的每一边变为自身. 让 $g = f|_{\partial T}: \partial T \to \partial T$, 则 g 同伦于恒等映射 i. 事实上, 定义 $G: \partial T \times \mathbb{I} \to \partial T$ 为 $G(x, t) = tx + (1-t)g(x)$, 则 $g \overset{G}{\simeq} i$. 因为 ∂T 同伦于 $\mathbb{S}^1$, $\pi_1(\partial T)$ 同构于 $(\mathbb{Z}, +)$, 所以 i_* 不是零同态. 由定理 6.3.3, i 不能同伦于常值映射, 故 g 不与常值映射同伦.

另一方面, f 是 g 的连续扩张. 取定 $x_0 \in T - \partial T$, 定义 $F: \partial T \times \mathbb{I} \to \partial T$ 为 $F(x, t) = f(tx_0 + (1-t)x)$, 则 F 是 g 与常值映射之间的同伦, 矛盾.

引理 5.2.2 是一维的不动点定理. 下面证明二维的不动点定理.

定理 6.3.4 (Brouwer *不动点定理*, 1909) 若映射 $f: \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ 连续, 则存在 $x \in \mathbb{B}^2$ 使得 $f(x) = x$.

证明 若不然, 则对每个 $x \in \mathbb{B}^2$, $f(x) \neq x$. 定义 $g: \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ 为 $g(x) = x - f(x)$, 则存在 $x_0 \in \mathbb{S}^1$ 和实数 $a < 0$ 使得 $g(x_0) = ax_0$. 否则, 令 $h = g|_{\mathbb{S}^1}: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, 并定义 $H: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$ 使 $H(x, t) = tx + (1-t)h(x)$, 则 $H(x, t) \neq 0$. 事实上, 当 $t = 0, 1$ 时, $H(x, t) \neq 0$; 如果当 $0 < t < 1$ 时, $H(x, t) = 0$, 则 $h(x) = -tx/(1-t)$, 这与假设矛盾. 从而 $H: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, 于是 h 同伦于内射 $j: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$. 由推论 6.3.1, h 不是零伦的, 这与引理 6.3.3 矛盾. 因此, 存在 $x_0 \in \mathbb{S}^1$ 和 $a < 0$, 满足 $g(x_0) = ax_0$, 于是 $f(x_0) = (1-a)x_0 \notin \mathbb{B}^2$, 矛盾. □

Brouwer 不动点定理可以推广到高维的情形. 它之所以引起人们的极大兴趣, 是因为它对映射, 除连续性外无任何其他要求, 而可以广泛应用于方程的解的存在性.

定义 6.3.4 (W. Hurewicz, 1935) 设映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$ 都是连续的. 如果映射 $g\circ f: X \to X$ 同伦于 X 的恒等映射, 映射 $f\circ g: Y \to Y$ 同伦于 Y 的恒等映射, 则称 f, g 为*同伦等价*, 其中的每一个是另一个的同伦逆. 如果两个空

间之间存在同伦等价, 则称这两个空间之间有相同的伦型.

易验证, 同伦等价是等价关系. 如果 A 是空间 X 的形变收缩核, 则 A 与 X 有相同的伦型. 事实上, 设 H 是这形变收缩, 让 $j: A \to X$ 为内射, 定义 $r: X \to A$ 为 $r(x) = H(x,t)$, 则 $r \circ j$ 是 A 上的恒等映射, H 是 X 上的恒等映射与 $j \circ r$ 的同伦.

下面将证明同伦等价的空间具有同构的基本群, 这推广了推论 6.1.2 和定理 6.3.2.

引理 6.3.4 设 $h, k: X \to Y$ 都是连续映射, 且 $h(x_0) = y_0$, $k(x_0) = y_1$. 如果 $h \simeq k$, 则在 Y 中存在从 y_0 到 y_1 的一条道路 α, 使得 $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$.

证明 设 $h \overset{H}{\simeq} k$. 定义 $\alpha: \mathbb{I} \to Y$ 为 $\alpha(t) = H(x_0, t)$, 则 α 是 Y 中从 y_0 到 y_1 的一条道路. 下证 $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$. 即对 $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, 有 $k_*([f]) = \hat{\alpha}(h_*([f]))$, 也就是 $[k \circ f] = [\bar{\alpha}] * [h \circ f] * [\alpha]$, 等价于 $[\alpha] * [k \circ f] = [h * f] * [\alpha]$.

如图 6.3.2, 对 $X \times \mathbb{I}$ 的两条回路 f_0 和 f_1, 其中 $f_0(s) = (f(s), 0)$, $f_1(s) = (f(s), 1)$, 及 $X \times \mathbb{I}$ 的一条道路 c, 其中 $c(t) = (x_0, t)$, 那么

$$H \circ f_0 = h \circ f, \quad H \circ f_1 = k \circ f, \quad H \circ c = \alpha.$$

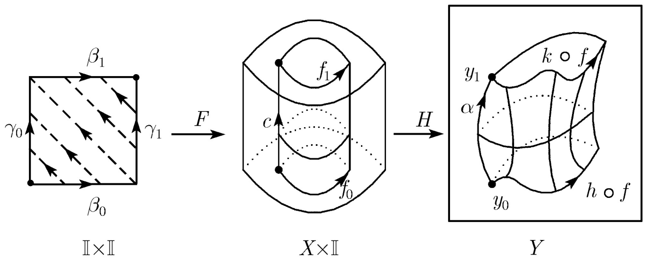


图 6.3.2

定义 $F: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$ 为 $F(s,t) = (f(s), t)$. 对 $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 的 4 条边, 记

$$\beta_0(s) = (s, 0), \quad \beta_1(s) = (s, 1), \quad \gamma_0(t) = (0, t), \quad \gamma_1(t) = (1, t),$$

其中 $(s,t) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, 那么

$$F \circ \beta_0 = f_0, \quad F \circ \beta_1 = f_1, \quad F \circ \gamma_0 = F \circ \gamma_1 = c.$$

由于 $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 是凸集, 所以 $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 中的道路 $\beta_0 * \gamma_1$ 和 $\gamma_0 * \beta_1$ 同伦, 设 $\beta_0 * \gamma_1 \overset{G}{\simeq}_p \gamma_0 * \beta_1$, 那么 $f_0 * c \overset{F \circ G}{\simeq}_p c * f_1$, 因此 $H \circ (F \circ G)$ 是 $(H \circ f_0) * (H \circ c) = (h \circ f) * \alpha$ 与 $(H \circ c) * (H \circ f_1) = \alpha * (k \circ f)$ 之间的道路同伦. □

推论 6.3.2 设 $h, k: X \to Y$ 都是连续映射, $h(x_0) = y_0$, $k(x_0) = y_1$, 且 $h \simeq k$. 如果 k_* 是单射 (满射, 零同态, 同构), 则 h_* 也是单射 (满射, 零同态, 同构). 特别地, 如果 h 是零伦的, 则 h_* 是零同态.

证明 利用定理 6.1.3, $\hat{\alpha}$ 是群同构, 再利用引理 6.3.4 得上述推论. □

定理 6.3.5 若映射 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 是同伦等价, 则 $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 同构.

证明 设 $g:Y\to X$ 是 f 的同伦逆, 令 $x_1=g(y_0)$, $y_1=f(x_1)$, 并且考虑映射

$$(X,x_0)\xrightarrow{f}(Y,y_0)\xrightarrow{g}(X,x_1)\xrightarrow{f}(Y,y_1),$$

相应地有诱导同态

$$\pi_1(X,x_0)\xrightarrow{(f_{x_0})_*}\pi_1(Y,y_0)\xrightarrow{g_*}\pi_1(X,x_1)\xrightarrow{(f_{x_1})_*}\pi_1(Y,y_1).$$

由于 $g\circ f\simeq i_X$, 由定理 6.3.4, 存在 X 中的一条道路 α 使得 $(g\circ f)_*=\hat{\alpha}\circ(i_X)_*=\hat{\alpha}$, 于是 $g_*\circ(f_{x_0})_*=(g\circ f)_*$ 是同构. 类似地, 由于 $f\circ g\simeq i_Y$, $(f_{x_1})_*\circ g_*=(f\circ g)_*$ 是同构, 从而 g_* 是满且单的, 于是 g_* 是同构, 故 $(f_{x_0})_*=(g_*)^{-1}\circ\hat{\alpha}$ 也是同构. □

同伦等价关系比形变收缩的概念更为一般. 1971 年, M. Fuchs 证明了下述定理：两个空间 X 和 Y 同伦等价当且仅当它们分别同胚于同一个空间 Z 的两个形变收缩核 [10].

习 题 6.3

6.3.1 若 A 是 $\mathbb{B}^2$ 的收缩核, 则每个连续映射 $f:A\to A$ 必有不动点.

6.3.2 如果 A 是空间 X 的形变收缩核, B 是 A 的形变收缩核, 则 B 是 X 的形变收缩核.

6.3.3 设 $h:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 是零伦的. 证明：h 必有不动点, 并且存在 $x\in\mathbb{S}^1$, 使得 $h(x)=-x$.

6.3.4 计算 Möbius 带的基本群.

6.3.5 空间 X 称为*可缩的*, 如果 X 到自身的恒等映射是零伦的. 证明：空间 X 是可缩的当且仅当 X 具有一点的伦型.

6.3.6 设 A 是 3×3 的正实数矩阵. 证明：A 有正的实特征值.

6.4 $\mathbb{S}^n$ 的基本群

我们已证明了 $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ 同构于 $(\mathbb{Z},+)$. 本节将证明当 $n\geqslant 2$ 时, $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ 是平凡群, 并通过计算几类曲面的基本群说明其不同胚. 先证明 1931 年, H. Seifert (德, 1907～1996) 和 1933 年, E. van Kampen (比利时, 1908～1942) 独立证明的著名定理.

定理 6.4.1 (Seifert-van Kampen *定理*) 设空间 $X=U\cup V$, 其中 U, V 都是 X 的开集且 $U\cap V$ 是道路连通的. 取定 $x_0\in U\cap V$, 则两个内射 $j_1:(U,x_0)\to(X,x_0)$, $j_2:(V,x_0)\to(X,x_0)$ 的诱导同态的像生成 $\pi_1(X,x_0)$.

证明 设 f 是 X 中以 x_0 为基点的一条回路, 要证明 f 同伦于形如 $g_1*(g_2*(\cdots*(g_n)))$ 的道路, 其中每个 g_i 是 U 或 V 中以 x_0 为基点的回路.

(1) 存在 $\mathbb{I}$ 的分划 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, 使得每个 $f(a_i) \in U \cap V$ 且 $f([a_{i-1}, a_i])$ 含于 U 或 V 之一中, 见图 6.4.1.

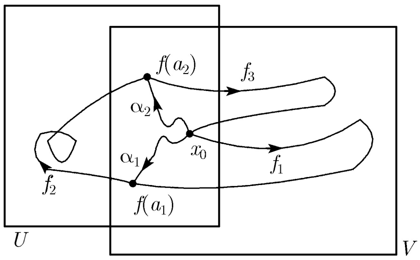


图 6.4.1

由 Lebesgue 数引理, 存在 $\mathbb{I}$ 的分划 $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_m = 1$, 使得每个 $f([b_{i-1}, b_i])$ 含于 U 或 V 之一中. 如果所有 $f(b_i) \in U \cap V$, 则证明完成. 若存在 $i < m$ 使得 $f(b_i) \notin U \cap V$, 如果 $f(b_i) \in U$, 则 $f([b_{i-1}, b_i])$, $f([b_i, b_{i+1}]) \subset U$; 如果 $f(b_i) \in V$, 则 $f([b_{i-1}, b_i])$, $f([b_i, b_{i+1}]) \subset V$. 所以 $f([b_{i-1}, b_{i+1}])$ 含于 U 或 V 之一中, 于是删去 b_i 得到新的 $\mathbb{I}$ 的分划. 注意到 $f(b_0) = f(b_n) = x_0 \in U \cap V$. 继续上述过程至有限步, 可获得符合 (1) 要求的分划.

(2) 对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$, 构造 U 或 V 中以 x_0 为基点的回路 g_i. 定义 $f_i : \mathbb{I} \to X$ 为从 $\mathbb{I}$ 到 $[a_{i-1}, a_i]$ 的正线性映射与 f 的复合, 即 $f_i(s) = f((1-s)a_{i-1} + sa_i)$, 则 f_i 是 U 或 V 中的道路且 $f_i(1) \in U \cap V$. 由于 $U \cap V$ 是道路连通的, 在 $U \cap V$ 中存在从 x_0 到 $f_i(1)$ 的道路 α_i. 可以取 α_0, α_n 都是 x_0 处的常值道路. 令 $g_i = (\alpha_{i-1} * f_i) * \overline{\alpha}_i$, 则 g_i 是 U 或 V 中以 x_0 为基点的回路.

(3) 因为每个 f_i 是 $\mathbb{I}$ 到 $[a_{i-1}, a_i]$ 的正线性映射与 f 的复合, 由定理 6.1.2, $[f] = [f_1] * \cdots * [f_n] = [g_1] * \cdots * [g_n]$. □

推论 6.4.1 设空间 $X = U \cup V$, 其中 U, V 都是 X 中单连通的开集. 若 $U \cap V$ 是非空的道路连通子集, 则 X 是单连通的.

定理 6.4.2 当 $n \geqslant 2$ 时, $\mathbb{S}^n$ 是单连通的.

证明 设 $p = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $q = (0, \cdots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 分别为 $\mathbb{S}^n$ 的 “北极”、“南极”.

(1) 穿孔球面 $\mathbb{S}^n - \{p\}$, $\mathbb{S}^n - \{q\}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 同胚.

定义球极投射 $f : (\mathbb{S}^n - \{p\}) \to \mathbb{R}^n$ 为

$$f(x) = f(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n).$$

$f(x) \times \{0\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中连接 x, p 的直线与 $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 的交点, 则 f 是连续的. 定义映射 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n - \{p\}$ 为

$$g(y_1, \cdots, y_n) = (ty_1, \cdots, ty_n, 1 - t),$$

其中

$$(ty_1)^2 + \cdots + (ty_n)^2 + (1-t)^2 = 1, \quad 即\ t = \frac{2}{1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2},$$

则 g 连续且 g 是 f 的逆, 于是 f 是同胚.

定义 $\rho:(\mathbb{S}^n-\{p\})\to(\mathbb{S}^n-\{q\})$ 为

$$\rho(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})=(x_1,\cdots,x_n,-x_{n+1}),$$

则 ρ 是同胚, 所以 $\mathbb{S}^n-\{p\}$ 同胚于 $\mathbb{S}^n-\{q\}$, 于是 $\mathbb{S}^n-\{q\}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 同胚.

(2) 令 $U=\mathbb{S}^n-\{p\}$, $V=\mathbb{S}^n-\{q\}$, 则 $\mathbb{S}^n$ 是开子集 U, V 之并, 且 $U\cap V=\mathbb{S}^n-\{p,\ q\}$. 因为 U, V 均同胚于 $\mathbb{R}^n$, 所以它们是单连通的. 取 f 为 (1) 中的球极投射, 那么 $f(U\cap V)=\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$. 由于 $\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ 是道路连通的, 且 f 是同胚, 所以 $U\cap V$ 也是道路连通的. 由推论 6.4.1, $\mathbb{S}^n$ 是单连通的. □

推论 6.4.2 当 $n>2$ 时, $\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ 是单连通的.

证明 由推论 6.3.1, $\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ 的基本群与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的基本群同构, 所以当 $n>2$ 时, $\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ 是单连通的. □

推论 6.4.3 当 $n>2$ 时, $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚.

证明 $\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ 是单连通的, 而 $\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ 同胚于 $\mathbb{S}^1$, 所以 $\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ 不是单连通的. □

本节第二部分讨论几类曲面的基本群.

拓扑空间 X 称为*曲面*, 若 X 是具有可数基的 Hausdorff 空间, 并且 X 的每一点存在开邻域与 $\mathbb{R}^2$ 的某开子集同胚. 下面将讨论球面 $\mathbb{S}^2$, 射影平面 P^2 和环面 $\mathbb{T}$ 的基本群, 用比较基本群的方法来说明它们是互不同胚的.

由定理 6.4.2, $\mathbb{S}^2$ 是单连通的.

由例 6.2.3, 环面 $\mathbb{T}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ 是曲面. 为计算环面的基本群, 先回忆相关的代数知识. 设 $(A,\cdot)$, $(B,\cdot)$ 都是群. 在 $A\times B$ 上定义运算 "$\cdot$" 如下:

$$(a,b)\cdot(a',b')=(a\cdot a',b\cdot b'),\quad \forall\ (a,b),\ (a',b')\in A\times B,$$

则 $(A\times B,\cdot)$ 是一个群. 如果 $h:C\to A$, $k:C\to B$ 为群同态, 则定义 $\varPhi:C\to A\times B$ 为 $\varPhi(c)=(h(c),k(c))$, 则 $\varPhi$ 是群同态.

定理 6.4.3 $\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$ 同构于 $\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$.

证明 令 $p:X\times Y\to X$, $q:X\times Y\to Y$ 表示投射, 则有诱导同态

$$p_*:\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0),$$
$$q_*:\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(Y,y_0).$$

定义同态 $\varPhi:\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$ 为

$$\varPhi([f])=(p_*([f]),q_*([f]))=([p\circ f],[q\circ f]),$$

则 $\varPhi$ 是同态, 下面证明 $\varPhi$ 是同构.

(1) Φ 是满射. 设 g, h 分别是 X, Y 中以 x_0, y_0 为基点的回路. 定义 $f: \mathbb{I} \to X \times Y$ 为 $f(s) = (g(s), h(s))$, 则 f 是 $X \times Y$ 中以 (x_0, y_0) 为基点的回路, 且 $\Phi([f]) = ([p \circ f], [q \circ f]) = ([g], [h])$.

(2) Φ 是单射. 设 f 是 $X \times Y$ 中以 (x_0, y_0) 为基点的回路, 且 $\Phi([f])$ 是单位元, 于是 $p \circ f \overset{G}{\simeq} e_{x_0}$, $q \circ f \overset{H}{\simeq} e_{y_0}$. 定义 $F: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X \times Y$ 使 $F(s,t) = (G(s,t), H(s,t))$, 则 $f \overset{F}{\simeq} e_{(x_0, y_0)}$. □

推论 6.4.4 $\pi_1(\mathbb{T})$ 同构于 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

定义 6.4.1 在 $\mathbb{S}^2$ 中把每一点 x 与其对径点 $-x$ 黏合所得到的商空间称为射影平面, 记为 P^2 . 商映射 $p: \mathbb{S}^2 \to P^2$ 称为射影映射.

P^2 是等价类的集合, 等价关系由 “$x \sim x$” 或 “$x \sim -x$” 确定, 赋予下述商拓扑：对 $V \subset P^2$, V 是 P^2 的开集当且仅当 $p^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的开集.

定理 6.4.4 P^2 是曲面且射影映射 $p: \mathbb{S}^2 \to P^2$ 是覆叠映射.

证明 (1) p 是开映射. 设 U 是 $\mathbb{S}^2$ 的开集, 定义对径映射 $a: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ 为 $a(x) = -x$, 则 a 是同胚, 于是 $a(U)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的开集. 由于 $p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的开集, 所以 $p(U)$ 是 P^2 的开集. 故 p 是开映射.

(2) p 是覆叠映射. 对 $y \in P^2$, 取定 $x \in p^{-1}(y)$, 令 $U = B(x, 1/2) \cap \mathbb{S}^2$, 其中 B 是欧氏空间 $(\mathbb{R}^3, d)$ 的球形邻域, 则 U 是 x 在 $\mathbb{S}^2$ 中的开邻域, 于是 $p(U)$ 是 y 在 P^2 中的邻域. 由于对每个 $z \in \mathbb{S}^2$, 总有 $d(z, a(z)) = 2$, 所以 U 不含 $\mathbb{S}^2$ 中任何一对对径点, 于是 $p|_U: U \to p(U)$ 是连续、开、双射, 因而是同胚. 类似地, $p|_{a(U)}: a(U) \to p(U)$ 也是同胚, 从而 $\{U,\ a(U)\}$ 是 $p^{-1}(p(U))$ 的片状分拆, 即 p 均衡地覆盖 $p(U)$. 故 p 是覆叠映射.

(3) P^2 是曲面. 由于 $\mathbb{S}^2$ 有可数基且 p 是开映射, 所以 P^2 具有可数基. 对 $y_1 \neq y_2 \in P^2$, 则 $p^{-1}(y_1) \cup p^{-1}(y_2)$ 是 4 点集, 设 2ε 是这 4 点中每两点距离的最小值. 令 U_1, U_2 分别是 $p^{-1}(y_1)$, $p^{-1}(y_2)$ 中一个点的 ε 邻域, 则 $U_1 \cup a(U_1)$ 与 $U_2 \cup a(U_2)$ 不相交, 于是 $p(U_1)$, $p(U_2)$ 分别是 y_1, y_2 在 P^2 中不相交的邻域. 所以 P^2 是 Hausdorff 空间. 由 (2) 所证, P^2 的每一点有开邻域与 $\mathbb{S}^2$ 的开集同胚, 所以 P^2 的每一点有开邻域与 $\mathbb{R}^2$ 的开集同胚. 故 P^2 是曲面. □

推论 6.4.5 $\pi_1(P^2)$ 是 2 阶群.

证明 因为 $\mathbb{S}^2$ 是单连通空间, 由定理 6.2.3, 对每个 $y \in P^2$, 由射影映射 $p: \mathbb{S}^2 \to P^2$ 诱导的提升对应 $\varphi: \pi_1(P^2, y) \to p^{-1}(y)$ 是双射. 因为 $p^{-1}(y)$ 由两个元组成, 所以 $\pi_1(P^2)$ 是 2 阶群. □

由此, $\pi_1(P^2)$ 同构于模 2 的剩余类加群 $\mathbb{Z}_2$. 对于一般的 $n \in \mathbb{Z}_+$, 可以类似地定义商映射 $p: \mathbb{S}^n \to P^n$, 称 P^n 为 n 维射影空间, 则射影映射 $p: \mathbb{S}^n \to P^n$ 是覆叠映射, 所以当 $n > 1$ 时, 由于 $\mathbb{S}^n$ 是单连通的, 所以 $\pi_1(P^n)$ 同构于 $\mathbb{Z}_2$.

推论 6.4.6 曲面 $\mathbb{S}^2$, P^2 及 $\mathbb{T}$ 互不同胚.

下面的例子表明基本群可以不是交换群.

例 6.4.1 8 字型空间的基本群不是交换群.

8 字型空间 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中两个圆周 A, B 之并, 且 A 与 B 仅有一个交点 x_0. 下面构造 X 的覆叠空间 E.

让 $E=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}(A_n\cup B_n)$, 其中 A_0 是 x 轴, B_0 是 y 轴, 对 $n\neq 0$, A_n 是与 y 轴相切于 $(0,n)$ 的圆周, B_n 是与 x 轴相切于 $(n,0)$ 的圆周. 设这些圆周均互不相交, 见图 6.4.2.

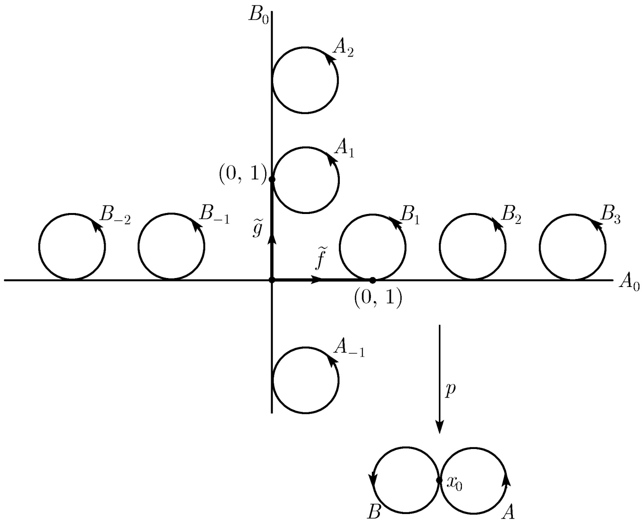


图 6.4.2

定义 $p:E\to X$ 满足: p 分别把 x 轴, y 轴缠在圆周 A, B 上使整数点映到基点 x_0; 对 $n\neq 0$, p 分别把与 x 轴, y 轴相切于整数点的圆周 B_n, A_n 同胚映到 B, A 上且切点映为 x_0. 则 p 是覆叠映射.

令 $\tilde{f}:\mathbb{I}\to E$ 为 $\tilde{f}(s)=(s,0)$, 沿 x 轴从原点 (0, 0) 到 (1, 0) 的道路; $\tilde{g}:\mathbb{I}\to E$ 为 $\tilde{g}(s)=(0,s)$, 沿 y 轴从原点 (0, 0) 到 (0, 1) 的道路. 设 $f=p\circ\tilde{f}$, $g=p\circ\tilde{g}$, 则 f,g 分别是 X 中以 x_0 为基点的绕圆周 A, B 的回路. 下面证明: $f*g\not\simeq_p g*f$, 从而 $[f]*[g]\neq[g]*[f]$.

$f*g$ 提升为沿 x 轴从 (0, 0) 到 (1, 0), 再从 (1, 0) 沿 B_1 走一圈到 (1, 0). $g*f$ 提升为沿 y 轴从 (0, 0) 到 (0, 1), 再从 (0, 1) 沿 A_1 走一圈到 (0, 1). 由于这两提升后的道路终点不同, 由定理 6.2.2, $f*g\not\simeq_p g*f$.

习 题 6.4

6.4.1 计算 "实心环" $\mathbb{S}^1\times\mathbb{B}^2$ 和积空间 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2$ 的基本群.

6.4.2 设 X 是 $\mathbb{B}^2$ 中把 $\mathbb{S}^1$ 中的每一点 x 和它的对径点 $-x$ 黏合所得到的商空间. 证明：X 同胚于射影平面 P^2.

6.4.3 (Borsuk-Ulam *定理*) (1) 不存在连续映射 $f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^1$, 使得对任意 $x\in\mathbb{S}^2$ 有 $f(-x)=-f(x)$.

(2) 若 $g:\mathbb{S}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一连续映射, 则存在 $x\in\mathbb{S}^2$, 使得 $g(x)=g(-x)$.

6.5 三个著名定理的证明

本节利用基本群的理论来证明代数与几何中三个经典的著名定理：一是代数基本定理, 二是 Jordan 曲线定理, 三是 Brouwer 区域不变性定理.

代数基本定理有很多的证明方法, 如代数方法、复变函数的方法都可给出证明, 在第 7 章将借助反函数定理证明, 本节通过代数拓扑的方法证明.

用 $\mathbb{C}$ 表示全体复数的集合.

定理 6.5.1 (*代数基本定理*, 1799) 复系数的 $n\ (>0)$ 次方程

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0 \tag{6.5.1}$$

至少有一个 (实或复的) 根.

证明 定义 $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 为 $f(z)=z^n,\ z\in\mathbb{C}$. 取定 $b_0=(1,0)\in\mathbb{S}^1$.

(1) 诱导同态 $f_*:\pi_1(\mathbb{S}^1,b_0)\to\pi_1(\mathbb{S}^1,b_0)$ 是单射.

$\mathbb{S}^1$ 中的标准回路 $p_0:\mathbb{I}\to\mathbb{S}^1$ 定义为 $p_0(s)=(\cos 2\pi s,\sin 2\pi s)$. 它在 f_* 下的像是回路 $f_0(s)=(\cos 2n\pi s,\sin 2n\pi s)$. p_0, f_0 分别提升为覆叠空间 $\mathbb{R}$ 中以 0 为起点的道路 $\tilde{p}_0(s)=s$ 和 $\tilde{f}_0(s)=ns$, 所以在提升对应下, p_0 对应着整数 1, f_0 对应着整数 n, 因而 f_* 将无限循环群 $\pi_1(\mathbb{S}^1,b_0)$ 的生成元映成自身的 n 倍, 从而 f_* 是单射.

定义映射 $g:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ 为 $g(z)=z^n$.

(2) g 不是零伦的.

设内射 $j:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$, 则 $g=j\circ f$, 于是 $g_*=j_*\circ f_*$. 由推论 6.3.1 和 (1), g_* 是单射, 于是 g_* 不是零同态. 再由引理 6.3.3, g 不是零伦的.

(3) 若方程 (6.5.1) 满足条件：

$$\|a_{n-1}\|+\|a_{n-2}\|+\cdots+\|a_1\|+\|a_0\|<1,$$

则它在 $\mathbb{B}^2$ 中有一个根.

假设方程 (6.5.1) 在 $\mathbb{B}^2$ 中没有根, 于是可定义映射 $h:\mathbb{B}^2\to\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ 为

$$h(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0.$$

设 $l = h|_{\mathbb{S}^1}$, 则 h 是 l 的连续扩张, 由引理 6.3.3, l 是零伦的. 另一方面, 定义 $F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ 为

$$F(z,t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0).$$

由于

$$\begin{aligned}\|F(z,t)\| &\geqslant \|z^n\| - t\|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\| \\ &\geqslant 1 - t(\|a_{n-1}\| + \cdots + \|a_1\| + \|a_0\|) > 0,\end{aligned}$$

所以定义是确切的, 从而 $l \overset{F}{\simeq} g$, 于是 g 也是零伦的, 与 (2) 矛盾.

定理的证明. 待定实数 $c > 0$, 对方程 (6.5.1) 作变换 $x = cy$, 得

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \cdots + a_1(cy) + a_0 = 0, \tag{6.5.2}$$

即

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{c^{n-1}}y + \frac{a_0}{c^n} = 0.$$

取 c 足够大, 使得

$$\left\|\frac{a_{n-1}}{c}\right\| + \cdots + \left\|\frac{a_1}{c^{n-1}}\right\| + \left\|\frac{a_0}{c^n}\right\| < 1.$$

由 (3), 则方程 (6.5.2) 有根 $y = y_0$, 从而方程 (6.5.1) 有根 $x_0 = cy_0$. □

本节要证明的第二个主要结果是 Jordan 曲线定理. 与单位闭区间 $\mathbb{I}$ 同胚的空间称为**简单曲线或弧**, 与 $\mathbb{S}^1$ 同胚的空间称为**简单闭曲线**. 1887 年, C. Jordan (法, 1838~1922) 在他出版的著名教材《分析教程》(*Cours d'analyse*) 中提出了平面上的一个曲线定理, 现在称为 Jordan 曲线定理, Jordan 及随后的一些数学家给出了不正确的证明. 第一个正确的证明是 1905 年 O. Veblen (美, 1880~1960) 得到的. 早期的证明是很复杂的, 在这里介绍利用基本群理论得出的较简单的证明.

先回忆关于 $\mathbb{R}^2$ 连通性的基本事实 (见习题 6.5.1): 若 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的开集 G 的连通分支, 则 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的道路连通的开子集且 $\partial U \cap G = \varnothing$.

引理 6.5.1　设 F 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭集, A 是 F 的收缩核. 若 $\partial F \subset A$, 则 $F = A$.

证明　若 $F \neq A$, 取定 $x_0 \in F - A$, 不妨设 $x_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, 且 $F \subset \mathrm{int}(\mathbb{B}^2)$. 令 $r : F \to A$ 是收缩映射. 定义 $q : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ 为

$$q(x) = \begin{cases} r(x), & x \in F, \\ x, & x \in \overline{\mathbb{B}^2 - F}. \end{cases}$$

由于 $F \cap \overline{\mathbb{B}^2 - F} = \partial F \subset A$, 所以 q 是确切定义的, 且由粘接引理, q 连续. 因为每个 $q(x) \neq 0$, 定义 $\check{q} : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$ 使得 $\check{q}(x) = q(x)/\|q(x)\|$, 则 $\check{q}$ 是收缩映射, 这与定理 6.3.1 矛盾. □

引理 6.5.2　设 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的有界子集, A 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单曲线. 若 $\partial U \subset A$, 则 $U \subset A$.

证明　因为 A 是正规空间 $\overline{U} \cup A$ 的闭子集, 由 Tietze 扩张定理, 恒等映射 $i: A \to A$ 有连续扩张 $r: \overline{U} \cup A \to A$, 于是 A 是有界集合 $\overline{U} \cup A$ 的收缩核, 且 $\partial(\overline{U} \cup A) \subset \partial\overline{U} \cup \partial A \subset \partial U \cup A \subset A$, 由引理 6.5.1, $\overline{U} \cup A = A$, 所以 $U \subset A$. □

定理 6.5.2　如果 A 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单曲线, 则 $\mathbb{R}^2 - A$ 是连通的.

证明　由于 A 是 $\mathbb{R}^2$ 的紧子空间, 所以 A 是有界闭集, 于是 $\mathbb{R}^2 - A$ 有且仅有一个无界的连通分支. 如果 $\mathbb{R}^2 - A$ 不连通, 则它有一个有界的连通分支 U, 于是 $\partial U \subset A$, 再由引理 6.5.2, $U \subset A$, 矛盾. □

上述定理可简述为：简单曲线不能分割平面.

引理 6.5.3　设 J 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单闭曲线. 如果 $\mathbb{R}^2 - J$ 至少有两个连通分支, 则每个连通分支都以 J 为边界.

证明　设 U 是 $\mathbb{R}^2 - J$ 的连通分支, 则 $\partial U \subset J$. 设 $x \in J$ 且 W 是 x 在 $\mathbb{R}^2$ 的邻域, 要证 $W \cap \partial U \neq \varnothing$. 由于 J 同胚于 $\mathbb{S}^1$, 存在同胚 $\beta_1: \mathbb{I} \to J_1$, $\beta_2: \mathbb{I} \to J_2$, 满足

$$J = J_1 \cup J_2, \quad J_1 \cap J_2 = \{\beta_1(0), \beta_1(1)\},$$

$$\beta_1(0) = \beta_2(0), \quad \beta_1(1) = \beta_2(1), \quad J_1 \subset W.$$

取定 $y \in U$, 并在 $\mathbb{R}^2 - J$ 的某异于 U 的连通分支中取定点 z. 由定理 6.5.2, $\mathbb{R}^2 - J_2$ 是连通的, 于是 $\mathbb{R}^2 - J_2$ 中存在从 y 到 z 的一条道路 α. 如果 $\alpha(\mathbb{I}) \cap \partial U = \varnothing$, 由于 $\partial U = \overline{U} - U$, 所以 $\alpha(\mathbb{I}) \cap (\overline{U} - U) = \varnothing$, 于是 $\alpha(\mathbb{I}) \subset (\mathbb{R}^2 - \overline{U}) \cup U$, 而 $\mathbb{R}^2 - \overline{U}$ 和 U 是不相交的开集, 且 $z \in \mathbb{R}^2 - \overline{U}$, $y \in U$, 这与 $\alpha(\mathbb{I})$ 的连通性矛盾. 从而, $\alpha(\mathbb{I}) \cap \partial U \neq \varnothing$.

由于 $\partial U \subset J$ 且 $\alpha(\mathbb{I}) \cap J_2 = \varnothing$, 于是 $\varnothing \neq \alpha(\mathbb{I}) \cap \partial U \subset J_1 \subset W$, 所以 $W \cap \partial U \neq \varnothing$. 故 $\partial U = J$. □

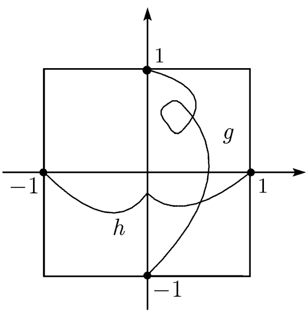


图 6.5.1

引理 6.5.4　令 $F = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. 设 h, $g: [-1, 1] \to F$ 为两个连续映射, 满足

$$g(-1) = (0, -1), \quad g(1) = (0, 1),$$

$$h(-1) = (-1, 0), \quad h(1) = (1, 0),$$

则 $h([-1, 1]) \cap g([-1, 1]) \neq \varnothing$.

引理的几何直观见图 6.5.1.

证明　对 $i = 1, 2$, 设 p_i 为 F 到第 i 个坐标空间的投射. 令 $h_i = p_i \circ h$, $g_i = p_i \circ g$. 对每个 $(s, t) \in F$, 令 $m(s, t) = \max\{|h_1(s) - g_1(t)|, \ |h_2(s) - g_2(t)|\}$. 若引理不成立,

则 $m(s,t)\neq 0$. 定义映射 $k:F\to\partial F$ 为

$$k(s,t)=\Big(\frac{g_1(t)-h_1(s)}{m(s,t)},\ \frac{h_2(s)-g_2(t)}{m(s,t)}\Big),$$

则 k 连续, 并且 $\forall\, x\in\partial F$, $k(x)\neq x$. 事实上, 因为 $\forall\, t\in[-1,1]$, 由于 $h_1(-1)=-1$, 所以 $g_1(t)-h_1(-1)=g_1(t)+1\geqslant 0$, 于是 $k(-1,t)\neq(-1,t)$. 类似可证, $k(1,t)\neq(1,t)$, 以及 $\forall\ s\in[-1,1]$, $k(s,-1)\neq(s,-1)$, $k(s,1)\neq(s,1)$. 另一方面, 由于 F 同胚于 $\mathbb{B}^2$, 由 Brouwer 不动点定理 (见定理 6.3.4), k 存在不动点, 矛盾. □

定理 6.5.3 (Jordan 曲线定理, 1887) 若 J 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单闭曲线, 则 $\mathbb{R}^2-J$ 恰有两个连通分支且每个连通分支的边界都是 J.

证明 设 $a,b\in J$ 使 $\|a-b\|=\mathrm{diam}J$. 不妨设 $a=(-1,0)$, $b=(1,0)$ 且 $\forall\,(x_1,x_2)\in J$ 有 $|x_1|\leqslant 1$, $|x_2|<1$. 令 $F=[-1,1]^2$, 则 $J\subset F$ 且 $J\cap\partial F=\{a,b\}$, 见图 6.5.2.

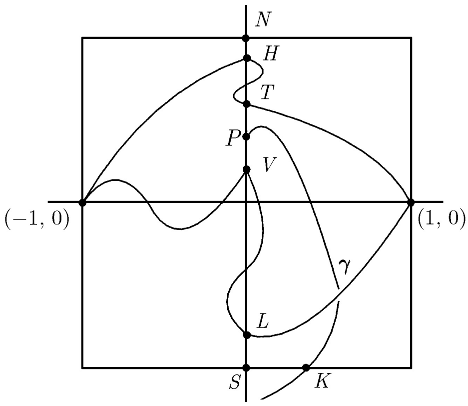


图 6.5.2

由于 J 同胚于 $\mathbb{S}^1$, 故可定义同胚 $\alpha_1:\mathbb{I}\to J_1$, $\alpha_2:\mathbb{I}\to J_2$, 使得 $J=J_1\cup J_2$ 且 $J_1\cap J_2=\{a,b\}$. 令 $N=(0,1)$, $S=(0,-1)$. 由引理 6.5.4, 从 N 到 S 的直线段 $\overline{NS}$ 与 J_1,J_2 都有交点且这两个交点不同, 所以存在 $H=(0,y_H)$, $L=(0,y_L)\in F$, 其中

$$y_H=\max\{y\in[-1,1]:(0,y)\in J\},\quad y_L=\min\{y\in[-1,1]:(0,y)\in J\},$$

则 $-1<y_L<y_H<1$. 不妨设 $H\in J_1$. 如果 $L\in J_1$, 则 $\overline{NH}$, 沿 J_1 从 H 到 L 的简单曲线及 $\overline{LS}$ 三者之并是一条连接 N 与 S 的简单曲线, 它与 J_2 不交, 这与引理 6.5.4 矛盾, 所以 $L\in J_2$.

令 $T=(0,y_T)$, $V=(0,y_V)$, 其中

$$y_T=\min\{y>y_L:(0,y)\in J_1\},\quad y_V=\max\{y<y_T:(0,y)\in J_2\}.$$

当 $H=T$ 时, 令 $\widehat{HT}=\{T\}$; 当 $H\neq T$ 时, 令 $\widehat{HT}$ 为沿 J_1 连接 H 与 T 的一条简单曲线; 类似可在 J_2 上定义 $\widehat{VL}$. 此外, 记线段 $\overline{TV}$ 的中点为 P.

(1) P 不属于 $\mathbb{R}^2-J$ 的无界的连通分支.

若不然, 设 P 属于 $\mathbb{R}^2-J$ 的无界的连通分支, 则存在 $\mathbb{R}^2-J$ 中的一条道路 γ 连接 P 与点 $(0,-2)$. 令

$$t_0=\max\{t\in\mathbb{I}:\gamma(t)\in F\},\quad K=\gamma(t_0)=(x_K,y_K),$$

则 $K\in\partial F$. 由于 $K\notin J$, 故 $y_K\neq 0$, 不妨设 $y_K<0$. 记 $\widehat{PK}=\gamma([0,t_0])$. 当 $K=S$ 时, 令 $\widehat{KS}=\{K\}$; 当 $K\neq S$ 时, 记 $c=(1,-1)$, $d=(-1,-1)$, 在折线 $\overline{ad}\cup\overline{dc}\cup\overline{cb}$ 中有一条不通过 a,b 两点的简单曲线连接 K 与 S, 记作 $\widehat{KS}$, 那么

$$\overline{NH}\cup\widehat{HT}\cup\overline{TP}\cup\widehat{PK}\cup\widehat{KS}$$

是 F 中连接 N 与 S 的一条简单曲线, 它与 J_2 不交, 这与引理 6.5.4 矛盾.

(2) $\mathbb{R}^2-J$ 至多有两个连通分支.

若不然, 设 W 是 $\mathbb{R}^2-J$ 的有界的连通分支且 $P\notin W$, 那么 $W\subset F$. 由引理 6.5.3, $a,b\in\partial W$. 考虑简单曲线 $\widehat{NS}=\overline{NH}\cup\widehat{HT}\cup\overline{TV}\cup\widehat{VL}\cup\overline{LS}$, 由于 $a,b\notin\widehat{NS}$, 且 $\widehat{NS}$ 是闭集, 存在 $\varepsilon>0$, 使 $B(a,\varepsilon)\cap\widehat{NS}=\varnothing$, $B(b,\varepsilon)\cap\widehat{NS}=\varnothing$. 取定 $z_1\in W\cap B(a,\varepsilon)$, $z_2\in W\cap B(b,\varepsilon)$, 设 δ 是 W 中从 z_1 到 z_2 的一条道路, 则 F 中从 a 到 b 的一条简单曲线 $\overline{az_1}\cup\delta(\mathbb{I})\cup\overline{z_2b}$ 与 $\widehat{NS}$ 不交, 这与引理 6.5.4 矛盾.

由 (1) 和 (2), $\mathbb{R}^2-J$ 恰有两个连通分支. 再由引理 6.5.3, 每个连通分支都以 J 为边界. □

Jordan 曲线定理具有球面的叙述形式 (见习题 6.5.2): 设 C 是球面 $\mathbb{S}^2$ 中的一条简单闭曲线, 则 $\mathbb{S}^2-C$ 恰有两个连通分支且每个连通分支的边界都是 C. 在证明 "区域不变性" 定理时将引用这一定理. Jordan 曲线定理的一再推广正是代数拓扑学发展中的重要闪光点之一.

1912 年, L. E. J. Brouwer (荷, 1881~1966) 证明了 "区域不变性" 定理: 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意开集, 如果 $f:U\to\mathbb{R}^n$ 是连续单射, 那么 $f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 并且反函数 $f^{-1}:f(U)\to U$ 连续.

下面介绍 $\mathbb{R}^2$ 时的证明.

引理 6.5.5 (Borsuk 同伦扩张定理, 1937) 设 A 是空间 X 的闭子空间, Y 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子空间, 且映射 $f:A\to Y$ 连续. 如果 $X\times\mathbb{I}$ 是正规空间, 且 f 是零伦的, 则 f 有零伦的扩张 $g:X\to Y$.

证明 设 $F:A\times\mathbb{I}\to Y$, 满足 $f\overset{F}{\simeq}e_{y_0}$. 先把 F 连续扩张到 $X\times\mathbb{I}$ 的闭子空间 $(A\times\mathbb{I})\cup(X\times\{1\})$ 上, 使得 $F(X\times\{1\})=\{y_0\}$, 再由 Tietze 扩张定理, F 可连续扩张为 $G:X\times\mathbb{I}\to\mathbb{R}^n$.

令 $U=G^{-1}(Y)$, 则 U 是 $X\times\mathbb{I}$ 的开集且 $(A\times\mathbb{I})\cup(X\times\{1\})\subset U$. 由 $\mathbb{I}$ 的紧性及管形引理 (见引理 3.6.3), 存在 X 中包含 A 的开集 W, 使得 $W\times\mathbb{I}\subset U$. 由 X 的正规性, 存在连续映射 $\varphi:X\to\mathbb{I}$, 使得 $\varphi(A)\subset\{0\}$, $\varphi(X-W)\subset\{1\}$. 定义 $g:X\to Y$ 为 $g(x)=G(x,\varphi(x))$, 则 g 是 f 的连续扩张. 再定义 $H:X\times\mathbb{I}\to Y$ 为 $H(x,t)=G(x,(1-t)\varphi(x)+t)$, 则 $g\overset{H}{\simeq}e_{y_0}$. □

1975 年, K. Morita (日, 1915~1995) 和 M. Starbird 独立地证明了 Borsuk 同伦扩张定理中, $X\times\mathbb{I}$ 是正规空间的条件可减弱为设 X 是正规空间 [2].

引理 6.5.6 (Borsuk 引理) 设 A 是紧空间, $a,b\in\mathbb{S}^2$, 且 $f:A\to\mathbb{S}^2-\{a,b\}$ 是连续单射. 如果 f 是零伦的, 则 a,b 属于 $\mathbb{S}^2-f(A)$ 的同一个连通分支上.

证明 因为 $f(A)$ 同胚于 A 且 f 是零伦的, 所以内射 $j:f(A)\to\mathbb{S}^2-\{a,b\}$ 也是零伦的. 因而, 不妨设 f 是内射, 进而视 $\mathbb{S}^2$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的单点紧化 $\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$. 设 $a=(0,0)=\mathbf{0}$, $b=\infty$, 则引理可重述为: 设 A 是 $\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ 的紧子空间, 如果内射 $j:A\to\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ 是零伦的, 那么 $\mathbf{0}$ 属于 $\mathbb{R}^2-A$ 的无界的连通分支.

若不然, 设 C 是 $\mathbb{R}^2-A$ 的包含 $\mathbf{0}$ 的有界的连通分支, D 是 $\mathbb{R}^2-A$ 的其他连通分支之并, 则 D 含有无界连通分支, C, D 是 $\mathbb{R}^2$ 的不相交的开集且 $\mathbb{R}^2-A=C\cup D$, 见图 6.5.3. 因为 $j:A\to\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ 是零伦的, 由同伦扩张定理, j 有连续扩张 $k:C\cup A\to\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$. 定义 $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$, 使得 $h|_{C\cup A}=k$, 且 $h|_D$ 是恒等映射. 由粘接引理, h 是连续的. 设 B 是 $\mathbb{R}^2$ 的以 $\mathbf{0}$ 为球心、R 为半径的闭球体, 且 $C\cup A\subset B^\circ$. 定义 $r:B\to\partial B$ 为 $r(x)=Rh(x)/\|h(x)\|$, 则 r 是收缩, 与定理 6.3.1 矛盾. □

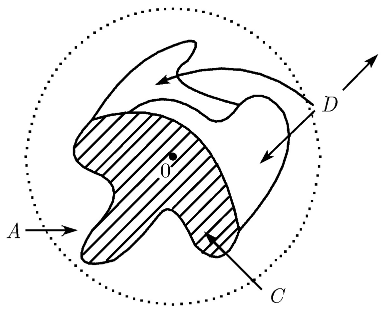


图 6.5.3

定理 6.5.4 (区域不变性定理, 1912) 如果 U 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的开集, $f:U\to\mathbb{R}^2$ 是连续单射, 则 $f(U)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的开集, 且反函数 $f^{-1}:f(U)\to U$ 连续.

证明 由于可视 $\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{S}^2$ 的开子空间, 所以只需证明: 如果 U 是 $\mathbb{S}^2$ 的开集, $f:U\to\mathbb{S}^2$ 是连续单射, 则 $f(U)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的开集, 且反函数连续.

(1) 如果 $\mathbb{R}^2$ 的闭球体 B 含于 U 中, 那么 $\mathbb{S}^2-f(B)$ 是连通的.

对 $a,b\in\mathbb{S}^2-f(B)$, 因为恒等映射 $i:B\to B$ 是零伦的, 所以

$$h=f|_B:B\to\mathbb{S}^2-\{a,b\}$$

是零伦的. 由 Borsuk 引理, a,b 属于 $\mathbb{S}^2-h(B)=\mathbb{S}^2-f(B)$ 的同一个连通分支.

(2) 如果 $\mathbb{R}^2$ 的闭球体 B 含于 U 中, 那么 $f(B^\circ)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的开集.

令 $C = f(\partial B)$, 则 C 是 $\mathbb{S}^2$ 的一条简单闭曲线. 由 Jordan 曲线定理, $\mathbb{S}^2 - C$ 恰有两个连通分支, 设为 V, W, 且连通集 $f(B^\circ) \subset V$, 见图 6.5.4. 下面证明 $V = f(B^\circ)$. 否则, 取定 $a \in V - f(B^\circ)$, $b \in W$. 由 (1), $\mathbb{S}^2 - f(B)$ 是包含 a, b 的连通集, 再由 $\mathbb{S}^2 - f(B) \subset \mathbb{S}^2 - C$, 于是 a, b 属于 $\mathbb{S}^2 - C$ 的同一个连通分支中, 矛盾. 故 $f(B^\circ)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的开集.

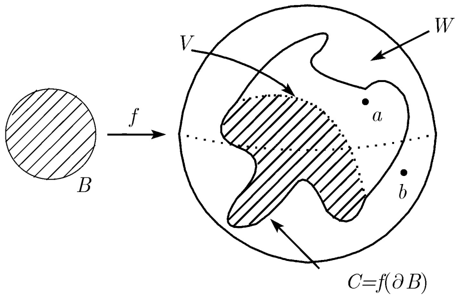


图 6.5.4

定理的证明. 对任意含于 U 中的闭球体 B, 因为 $f(B^\circ)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 中的开集, 所以 f 是开映射, 从而 $f(U)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 中的开集, 并且 f^{-1} 是连续的. □

习　题　6.5

6.5.1　若 U 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的开集 G 的连通分支, 则 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的道路连通的开子集且 $\partial U \cap G = \varnothing$.

6.5.2 (Jordan 曲线定理)　若 C 是球面 $\mathbb{S}^2$ 中的一条简单闭曲线, 则 $\mathbb{S}^2 - C$ 恰有两个连通分支且每个连通分支的边界都是 C.

第 7 章　流形的嵌入

微分拓扑学是研究可微流形在微分同胚下的不变性质的学科, 其典型的问题有 [11]：

(1) 给定的两个可微流形在什么条件下是微分同胚的?

(2) 某一给定的可微流形是另一个可微的有边流形的边吗?

(3) 某一给定的可微流形是可平行化的吗?

所有这些问题的牵涉面都超过流形的拓扑学, 但它们并不属于通常总是带有附加结构 (如联络或度量) 的微分几何. 这一课题最有力的工具来自代数拓扑学. 特别, 示性类论是最重要的; 据此, 从流形 M 过渡到它的切丛, 从而又过渡到 M 的某些依赖于这个丛的上同调类. 纤维丛理论的建立是代数拓扑学和微分拓扑学发展中最重要和最精彩的事件, 示性类理论在现代数学的许多重大领域显示出深刻的应用.

作为基本知识的介绍和一般拓扑学在微分流形中的一些应用, 本章的内容并不涉及代数拓扑学, 其目的仅在于说明可微 n 维流形总能够嵌入欧氏空间 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 作为其闭子集的 Whitney 定理 [12].

7.1　反函数定理

反函数定理是微分流形概念的基石, 它与 Brouwer 区域不变性定理 (见定理 6.5.4) 密切相关.

先回忆多元函数微分的概念. 对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$
$$|x|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i|\},$$
$$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n.$$

设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 函数 $f:G\to\mathbb{R}^m$. 称 f 在 $a\in G$ 可微, 如果存在 $m\times n$ 矩阵 A, 满足

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|f(a+x)-f(a)-Ax\|}{\|x\|}=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

即 $f(a+x)-f(a)-Ax=o(\|x\|)$. 记 $\mathrm{D}f(a)=A$ 为 f 在 a 的微分. 对正整数 r, 若 f 在 G 的每一点是 r 阶连续可微, 则称 f 在 G 上是 C^r **映射**. 特别提醒, 当论及 C^r 映射时, 总规定 $r\in\mathbb{Z}_+$.

引理 7.1.1 若 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是可逆的线性映射, 则存在正实数 μ, 使得

$$\|Ax\|\geqslant\mu\|x\|,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

证明 因为 A 是可逆的, 所以 $Ax=\mathbf{0}\Leftrightarrow x=\mathbf{0}$. 由于 $\|Ax\|$ 是 x 的连续函数, 所以它在球面 $S=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\|\xi\|=1\}$ 上取得最小值. 让 $\mu=\inf\{\|Ax\|:x\in S\}$, 则实数 $\mu>0$. 对每个 $x\in\mathbb{R}^n$, 若 $x\neq\mathbf{0}$, 那么

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\geqslant\mu,\qquad 即\ \|Ax\|\geqslant\mu\|x\|.$$

上式对 $x=\mathbf{0}$ 也成立. □

引理 7.1.2 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f:G\to\mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射.

(1) 对 $a\in G$, 如果 $\mathrm{D}f(a)=A$ 是可逆的线性映射, 那么存在 a 在 G 中的开邻域 U 和正实数 ν, 使得 $\|f(x')-f(x)\|\geqslant\nu\|x'-x\|$, $\forall\, x,x'\in U$. 从而, $f|_U$ 是单射.

(2) 如果 $\forall\, x\in G$, $\mathrm{D}f(x)$ 可逆, 则 $f(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

证明 (1) 记 $\varphi(x)=x-A^{-1}f(x)$, 则

$$\mathrm{D}\varphi(x)=\boldsymbol{I}-A^{-1}\mathrm{D}f(x),\quad \mathrm{D}\varphi(a)=\mathbf{0},$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位方阵. 因而存在 a 的开邻域 $U\subset G$, 使得在 U 上 $\|\mathrm{D}\varphi(x)\|\leqslant\rho<1$, 其中 $\rho=1/2$. 于是 $\forall\, x,x'\in U$, 有

$$\|\varphi(x')-\varphi(x)\|\leqslant\rho\|x'-x\|.$$

因为

$$f(x')=A(x'-\varphi(x')),\quad f(x)=A(x-\varphi(x)),$$

由引理 7.1.1, 存在正实数 μ 和 $\nu=\mu(1-\rho)$, 满足

$$\begin{aligned}\|f(x')-f(x)\|&=\|A(x'-\varphi(x')-(x-\varphi(x)))\|\\&\geqslant\mu\|x'-\varphi(x')-(x-\varphi(x))\|\\&\geqslant\mu(\|x'-x\|-\|\varphi(x')-\varphi(x)\|)\\&\geqslant\mu(1-\rho)\|x'-x\|\\&=\nu\|x'-x\|.\end{aligned}$$

(2) $\forall\, a \in G$, 由 (1), 存在 a 的开邻域 $U \subset G$, 使得 $f|_U$ 是单射. 取实数 $\lambda > 0$, 使得 $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leqslant \lambda\} \subset U$.

令 $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = \lambda\}$, 则 $\forall\, x \in S$, $f(x) \neq f(a)$.

令 $\kappa = \inf\{\|f(x) - f(a)\| : x \in S\}$, 则 $\kappa > 0$.

令 $b = f(a)$, $W = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - b\| < \kappa/2\}$, 则 W 是 b 的开邻域.

下证 $W \subset f(G)$. $\forall\, y \in W$, $\forall\, x \in S$,

$$\|f(x) - y\| \geqslant \|f(x) - f(a)\| - \|y - f(a)\| > \kappa - \frac{\kappa}{2} = \frac{\kappa}{2}.$$

于是

$$\|f(x) - y\|^2 > \frac{\kappa^2}{4} > \|f(a) - y\|^2.$$

若定义 $\psi : U \to \mathbb{R}$ 为 $\psi(x) = \|f(x) - y\|^2$, 则在 S 上 $\psi(x) > \psi(a)$. 这表明 ψ 在 $\overline{B}$ 上的最小值只能在 $\overline{B}$ 内部的某点 c 取得, 从而

$$\frac{\partial \psi(c)}{\partial x^k} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(c)}{\partial x^k}(f_j(c) - y_j) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$. 因为 Jacobi 行列式

$$J_f(c) = \det\left[\frac{\partial f_j(c)}{\partial x^k}\right] \neq 0,$$

所以

$$f_j(c) = y_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

即 $y = f(c) \in f(G)$. 从而 $W \subset f(G)$. □

定义 7.1.1　设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f : G \to \mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射. 如果 $H = f(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 且存在 C^r 映射 $h : H \to \mathbb{R}^n$, 满足 $h \circ f = i_G$, $f \circ h = i_H$, 则称 $f : G \to H$ 是 C^r 同胚映射, h 是 f 的 C^r 逆映射. C^r 同胚统称为微分同胚. 若对每个 $r \geqslant 1$, f 是 C^r 同胚, 则称 f 是 C^∞ 同胚, 常称为光滑同胚.

定理 7.1.1 (反函数定理)　设 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f : Q \to \mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射, $a \in Q$. 如果 $\mathrm{D}f(a)$ 可逆, 则存在 a 的开邻域 $U \subset Q$ 和 $b = f(a)$ 的开邻域 V, 使得 $f|_U : U \to V$ 是 C^r 同胚.

证明　取定 a 的开邻域 $G \subset Q$, 使得 $\det(\mathrm{D}f(x)) \neq 0$, $\forall\, x \in G$. 再取 a 的开邻域 $U \subset G$ 和正实数 ν 如引理 7.1.2 所述, 则

(1) $f|_U$ 是单射;

(2) $V=f(U)$ 是 $b=f(a)$ 的开邻域.

下面证明

(3) $g=(f|_U)^{-1}:V\to U$ 是 C^r 映射.

首先, 将 $x=g(y)$, $x'=g(y+\eta)$ 代入引理 7.1.2 的 (1) 中的不等式, 得

$$\|g(y+\eta)-g(y)\|\leqslant \nu^{-1}\|\eta\|,\quad \forall\, y,\, y+\eta\in V.$$

所以 g 连续.

记 $A=\mathrm{D}f(g(y))$, 那么

$$\begin{aligned}\eta-A(g(y+\eta)-g(y))&=f(g(y+\eta))-f(g(y))-A(g(y+\eta)-g(y))\\&=o(\|g(y+\eta)-g(y)\|)=o(\|\eta\|).\end{aligned}$$

由此得到

$$g(y+\eta)-g(y)-A^{-1}\eta=o(\|\eta\|).$$

从而 g 是可微的, 并且 $\mathrm{D}g(y)=(\mathrm{D}f(g(y)))^{-1}$. 由于方阵取逆的运算是连续可微的, f 是 C^r 的, 且 g 是连续的, 所以 g 是 C^1 映射.

对 $r>1$ 的情形, 还需判断 g 的 k 阶连续可微性, $1<k\leqslant r$. 事实上, 从 $\mathrm{D}f$ 和 g 的 $k-1$ 阶连续可微性, 可推断

$$\mathrm{D}g(y)=(\mathrm{D}f(g(y)))^{-1}$$

的 $k-1$ 阶连续可微性. 因此, g 是 k 阶连续可微的. □

反函数定理也称为*逆函数定理*. 下面简要说明反函数定理的拓扑意义.

定义 7.1.2 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f:G\to\mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射, $a\in G$. 如果存在 a 的开邻域 $U\subset G$ 和 $b=f(a)$ 的开邻域 V, 使得 $f|_U:U\to V$ 是 C^r 同胚, 则称 f 在 a (点邻近) 是*局部 C^r 同胚*. 若 $\forall\, a\in G$, $f:G\to\mathbb{R}^n$ 在 a 是局部 C^r 同胚的, 则称 f 是*局部 C^r 同胚*. 类似定义, *局部微分同胚*, *局部光滑同胚*.

反函数定理的拓扑意义: f 是 C^r 映射, $\mathrm{D}f(a)$ 可逆 $\Rightarrow$ f 在 a 是局部 C^r 同胚的.

定理 6.5.1 用基本群的方法证明了代数基本定理. 本节最后用反函数定理说明代数基本定理的一个证明思路. 由反函数定理可证明, n 次复系数多项式 $f(z)$ 定义的映射 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是开映射, $n\geqslant 1$. 因为 $\lim\limits_{z\to\infty}\|f(z)\|=\infty$, 所以存在 $b>0$, 使当 $\|z\|\geqslant b$ 时有 $\|f(z)\|>\|f(\mathbf{0})\|$. 记 $K=\{z\in\mathbb{C}:\|z\|\leqslant b\}$, 那么 $\|f(z)\|$ 在 K 上的最小值必在 K 内某点 c 取得. 从而 $f(c)=\mathbf{0}$. 否则, f 将 c 点的一个开邻域 U $(\subset K)$ 映成 $f(c)$ 的开邻域 W, 所以存在 $z\in U$ 使 $\|f(z)\|<\|f(c)\|$, 这与 $\|f(c)\|$ 的最小值矛盾, 见图 7.1.1.

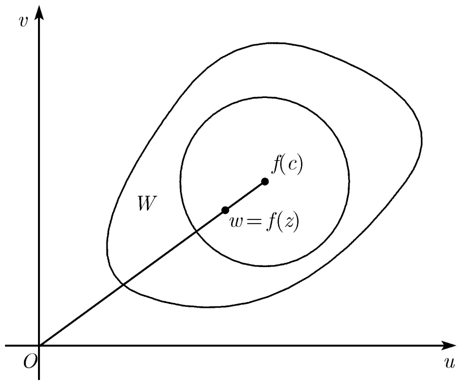


图 7.1.1

习 题 7.1

7.1.1 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f: G \to \mathbb{R}^n$ 是单射和 C^r 映射. 如果 $\forall\, x \in G$, $\mathrm{D}f(x)$ 可逆, 则 f 是从 G 到开集 $f(G)$ 的 C^r 微分同胚.

7.1.2 定义映射 $f: \mathbb{C} - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{C} - \{\mathbf{0}\}$ 为 $f(z) = z^2$, $\forall\, z \in \mathbb{C} - \{\mathbf{0}\}$. 验证:

(1) $\forall\, x \in G$, $\mathrm{D}f(x)$ 可逆;

(2) f 不是单射.

7.1.3 利用反函数定理, 证明代数基本定理.

7.2 可 微 映 射

$\mathbb{R}^n$ 中可微性的概念可以推广到同时具有拓扑结构和线性代数结构的一些空间类. 在欧氏空间的基础上, 人们希望进一步研究 “弯曲” 空间的微分学. 像球面 $\mathbb{S}^2$ 这样的几何对象当然不能有整体的线性结构, 但在每一点 $p \in \mathbb{S}^2$ 的邻近能引入局部坐标

$$\varphi: U \to \mathbb{R}^2.$$

于是对函数 $f: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$, 可通过函数

$$f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

来讨论 p 点邻近的可微性, 见图 7.2.1.

同时, 还自然希望在 p 点邻近两种局部坐标所表示的可微性是一致的. 这就要求局部坐标之间具有一定的相容性. 利用这种思想, 1913 年 H. Weyl (德, 1885~1955) 导入微分流形的概念.

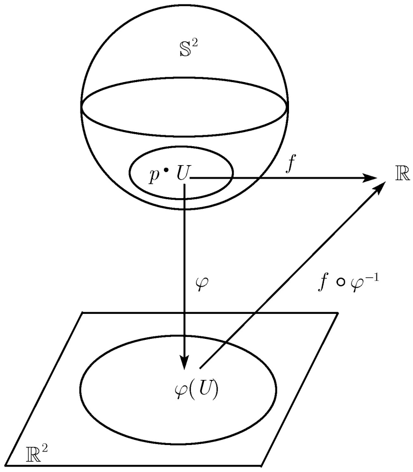


图 7.2.1

定义 7.2.1　设 M 是 T_2 的拓扑空间. (U,φ) 称为 M 的 (局部坐标) 图卡, 如果 U 是 M 的开集, $\varphi:U\to\mathbb{R}^m$ 是开的拓扑嵌入. 这时, φ 称为局部坐标.

M 的两个图卡 (U,φ), (V,ψ) 称为 C^r 相容的, 如果以下之一成立:

(1) $U\cap V=\varnothing$;

(2) $U\cap V\neq\varnothing$, 且下述两个坐标变换都是 C^r 映射 (图 7.2.2),

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V),$$
$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V).$$

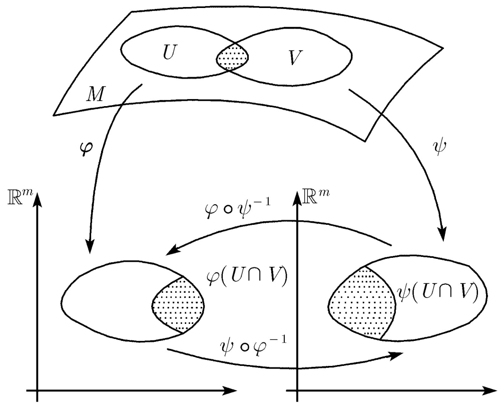


图 7.2.2

M 的一族图卡 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$ 称为 C^r 图汇, 如果

(3) $\mathscr{D}$ 中各图卡的定义域之集覆盖 M;

(4) $\mathscr{D}$ 中任两图卡是 C^r 相容的.

C^r 图汇 $\mathscr{D}$ 称为极大的, 如果它还满足

(5) 若图卡 (V,ψ) 与 $\mathscr{D}$ 中各图卡是 C^r 相容的, 则 $(V,\psi)\in\mathscr{D}$.

M 的极大 C^r 图汇称为 M 上的 C^r 结构. M 连同给定的 C^r 结构称为 C^r 流形. C^r 流形统称为微分流形. C^0 流形称为拓扑流形. C^∞ 流形称为光滑流形. 称流形 M 是 n 维的, 若 M 的每一点都有邻域与 $\mathbb{R}^n$ 的某个开集同胚. 记为 $\dim M=n$.

在 6.4 节介绍的曲面是二维流形.

定理 7.2.1 设 M 是 T_2 空间. 若 $\mathscr{D}$ 是 M 上的 C^r 图汇, 则存在 M 上唯一的包含 $\mathscr{D}$ 的 C^r 结构 $\mathscr{D}^*$, 使得 M 是 C^r 流形.

证明 设 $\mathscr{D}^*$ 是 M 上所有与 $\mathscr{D}$ 相容的图卡组成的集合, 则 $\mathscr{D}^*\supset\mathscr{D}$.

(1) $\mathscr{D}^*$ 是 M 上的 C^r 图汇. 对 (U,φ), $(V,\psi)\in\mathscr{D}^*$ 且 $U\cap V\neq\varnothing$, 若 $q\in\psi(U\cap V)$, 取 $p\in U\cap V$, 使得 $\psi(p)=q$, 且存在 $(W,\xi)\in\mathscr{D}$ 使 $p\in W$, 那么

$$\xi\circ\psi^{-1}:\psi(V\cap W)\to\xi(V\cap W)$$
$$\varphi\circ\xi^{-1}:\xi(W\cap U)\to\varphi(W\cap U)$$

都是 C^r 映射, 于是

$$\varphi\circ\psi^{-1}=(\varphi\circ\xi^{-1})\circ(\xi\circ\psi^{-1}):\psi(V\cap W\cap U)\to\varphi(V\cap W\cap U)$$

是 C^r 映射. 所以 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 在 q 点邻近是 C^r 映射, 从而 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 是 C^r 映射. 同理, $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是 C^r 映射.

(2) $\mathscr{D}^*$ 是极大的. 设 M 的图卡 (U,φ) 与 $\mathscr{D}^*$ 中的各图卡是 C^r 相容的, 而 $\mathscr{D}^*$ 中的图卡与 $\mathscr{D}$ 中的各图卡是 C^r 相容的, 于是 (U,φ) 与 $\mathscr{D}$ 中的各图卡是 C^r 相容的. 故 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}^*$. □

以上说明, 只要给定 M 上的 C^r 图汇, 就可断言 M 是 C^r 流形.

定义 7.2.2 设 M 是 n 维 C^r 流形, $S\subset M$. 如果 $\forall\, p\in S$, 存在 M 的图卡 (U,φ), 使得 $p\in U$ 且 $\varphi(U\cap S)=\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^m\times\{\mathbf{0}\})$, 则称 S 为 M 的 m 维正则子流形. 适合上述条件的图卡 (U,φ) 称为关于子流形 S 的正则图卡.

显然, 上述子流形 S 本身是 C^r 流形且 $\dim S=m$.

设 m 维 C^r 流形 M 有图卡 (U,φ), n 维 C^r 流形 N 有图卡 (V,ψ). 构造乘积图卡 $(U\times V,\varphi\times\psi)$, 其中定义乘积映射 $\varphi\times\psi:U\times V\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ 为 $\varphi\times\psi(x,y)=(\varphi(x),\psi(y))$. 显然, $\varphi\times\psi(U\times V)=\varphi(U)\times\psi(V)$ 是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的开集, $\varphi\times\psi:U\times V\to\varphi(U)\times\psi(V)$ 是同胚映射, 其逆映射 $(\varphi\times\psi)^{-1}=\varphi^{-1}\times\psi^{-1}$.

设 (U_i,φ_i) $(i=1,2)$ 是 M 的 C^r 相容图卡, (V_i,ψ_i) $(i=1,2)$ 是 N 的 C^r 相容图卡, 那么 $(U_1\times V_1,\varphi_1\times\psi_1)$ 与 $(U_2\times V_2,\varphi_2\times\psi_2)$ 是 $M\times N$ 的 C^r 相容图卡.

定义 7.2.3 设 M, N 都是 C^r 流形. 乘积空间 $M\times N$ 赋予上述方式构造的 C^r 图汇, 这样定义的 C^r 流形 $M\times N$ 称为 M 与 N 的*乘积流形*.

设 M, N 都是 C^r 流形, $f:M\to N$ 是连续映射, $p\in M$. 分别取 M, N 的图卡 (U,φ), (V,ψ), 使 $p\in U$, $f(p)\in V$. 不妨设 $f(U)\subset V$. 定义

$$\widetilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$$

称为 f 在 p 点邻近的*局部表示*. 如果 $\widetilde{f}$ 是 C^r 的, 则称 f 在 p 点邻近是 C^r 的; 如果 f 在 M 上的每一点是 C^r 的, 则称 f 为 C^r *映射*. C^r 映射统称为*可微映射*. C^∞ 映射又称为*光滑映射*.

可微性本身并不依赖于图卡的选择.

如果 $f:M\to N$ 是双射, 并且 f 和 f^{-1} 都是 C^r 映射, 则称 f 为 C^r *同胚*. C^r 同胚统称为*微分同胚*. C^∞ 同胚又称为*光滑同胚*.

设 M 和 N 都是 C^r 流形, U 是 M 中的开集, $p\in U$. 如果映射 $f:U\to N$ 是从 U 到开集 $f(U)\subset N$ 的 C^r 同胚, 那么称 f 在 p 点是*局部 C^r 同胚*.

关于微分流形的一个基本问题[13, 14]: 给定了一个拓扑流形, 其上是否存在微分结构? 如果存在微分结构, 是否必定唯一? 1960 年, M. Kervaire 发表文章构造了一个 10 维的拓扑流形, 它上面不允许任何的光滑结构. 1956 年, J. Milnor 发现了一个 7 维微分流形, 它拓扑同胚于通常的 7 维球面, 但是并不微分同胚于带上通常微分结构的 7 维球面. Milnor 的怪球面是 20 世纪 50 年代数学中最出人意料的成就.

定义 7.2.4 设 M, N 分别是 m 维, n 维 C^r 流形, $f:M\to N$ 是 C^r 映射, $p\in M$. 选择 M, N 的图卡 (U,φ) 和 (V,ψ), 满足 $p\in U$, $f(U)\subset V$. 作局部表示

$$\widetilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V).$$

考察 $\widetilde{f}$ 在 $\varphi(p)$ 点的微分 (即 Jacobi 矩阵) 的秩 $\mathrm{rank}(\mathrm{D}\widetilde{f})_{\varphi(p)}$, 则该秩不依赖于图卡的选择, 称其为 f 在 p 的*秩*, 记为 $\mathrm{rank}_p f$.

(1) 如果 $m\leqslant n$, $\mathrm{rank}_p f=m$, 则称 f 在 p 点是*浸入*. 如果 f 在 M 的每一点是浸入, 则称 f 是*浸入映射*.

(2) 如果 $m\geqslant n$, $\mathrm{rank}_p f=n$, 则称 f 在 p 点是*淹没*. 如果 f 在 M 的每一点是淹没, 则称 f 是*淹没映射*.

由反函数定理, 如果 $m=n=\mathrm{rank}_p f$, 那么 f 在 p 点是局部 C^r 同胚的. 如果 $m\leqslant n$, 则下述定义的*放入映射*是浸入映射:

$$j:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}=\mathbb{R}^n$$
$$(x_1,\cdots,x_m)\longmapsto(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0).$$

如果 $m \geqslant n$, 下述定义的投影映射是淹没映射:

$$\pi : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_m) \longmapsto (x_1, \cdots, x_n).$$

下面介绍浸入与淹没的简单局部表示. 为了方便起见, 简记 n 阶单位方阵为 $\boldsymbol{I}_n$.

引理 7.2.1 (浸入的典范局部表示) 设 M, N 分别是 m 维, n 维 C^r 流形. 若 $f : M \to N$ 在点 $p \in M$ 是浸入, 则分别存在 p, $q = f(p)$ 点的图卡 (U, φ), (V, ψ), 使得

$$f(U) \subset V, \quad \varphi(p) = \mathbf{0}, \quad \psi(q) = \mathbf{0}, \quad \widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = j|_{\varphi(U)},$$

其中 $j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$ 是放入映射.

证明 首先分别选取点 p, q 的图卡 (U_1, φ) 和 (V_1, ψ_1), 满足

$$f(U_1) \subset V_1, \quad \varphi(p) = \mathbf{0}, \quad \psi_1(q) = \mathbf{0}.$$

不妨设局部表示 $\widetilde{f}_1 = \psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$ 在 $\varphi(p) = \mathbf{0}$ 点的微分

$$\mathrm{D}\widetilde{f}_1(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} A_{m\times m} \\ * \end{pmatrix}_{n \times m},$$

其中 $\det A_{m\times m} \neq 0$. 令 $F : \varphi(U_1) \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ 为 $F(x, y) = \widetilde{f}_1(x) + (\mathbf{0}, y)$, 那么

$$\mathrm{D}F(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} A_{m\times m} & \mathbf{0} \\ * & \boldsymbol{I}_{n-m} \end{pmatrix},$$

所以 F 是从 $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ 点的某个开邻域 $H \subset \varphi(U_1) \times \mathbb{R}^{n-m}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $G \subset \psi_1(V_1)$ 的微分同胚. 记 $V = \psi_1^{-1}(G) \subset V_1$, $U = U_1 \cap f^{-1}(V) \subset U_1$, 则 $\psi_1(V) = G = F(H)$. 又因为 $F \circ j(x) = F(x, \mathbf{0}) = \widetilde{f}_1(x)$, 所以有如图 7.2.3 所示的交换图.

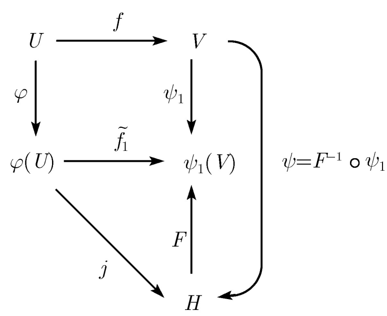


图 7.2.3

取 $\psi = F^{-1} \circ \psi_1$, 则图卡 (U, φ), (V, ψ) 及局部坐标表示 $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 具有如下性质: $\forall\, x \in \varphi(U)$,

$$\widetilde{f}(x) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = F^{-1} \circ \psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = F^{-1} \circ \widetilde{f}_1(x) = j(x),$$

即 $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = j|_{\varphi(U)}$. □

引理 7.2.2 (淹没的典范局部表示)　设 M, N 分别是 m 维, n 维 C^r 流形. 若 $f: M \to N$ 在点 $p \in M$ 是淹没, 则分别存在 p, $q = f(p)$ 点的图卡 (U, φ), (V, ψ), 使得

$$f(U) \subset V, \quad \varphi(p) = \mathbf{0}, \quad \psi(q) = \mathbf{0}, \quad \widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi|_{\varphi(U)},$$

其中 $\pi: \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$ 是投影映射.

证明　分别选取点 p, q 的图卡 (U_1, φ_1) 和 (V, ψ), 满足

$$f(U_1) \subset V, \quad \varphi_1(p) = \mathbf{0}, \quad \psi(q) = \mathbf{0}.$$

不妨设局部表示 $\widetilde{f}_1 = \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ 在 $\varphi_1(p) = \mathbf{0}$ 点的微分

$$\mathrm{D}\widetilde{f}_1(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} A_{n\times n} & * \end{pmatrix}_{n\times m},$$

其中 $\det A_{n\times n} \neq 0$. 定义 $F: \varphi_1(U_1) \to \mathbb{R}^m$ 使其分量表示为

$$F_i(x) = \begin{cases} (\widetilde{f}_1)_i(x), & i \leqslant n, \\ x_i, & n < i \leqslant m, \end{cases}$$

则

$$\mathrm{D}F(0) = \begin{pmatrix} A_{n\times n} & * \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{m-n} \end{pmatrix},$$

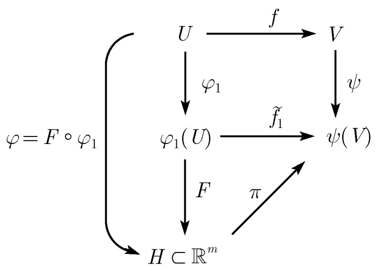


图 7.2.4

所以存在 $\mathbf{0}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的开邻域 $G \subset \varphi_1(U_1)$, 使得 F 是从 G 到 $\mathbb{R}^m$ 中某个包含 $\mathbf{0}$ 点的开集 H 的微分同胚. 记 $U = \varphi_1^{-1}(G) \subset U_1$. 由于 $\pi \circ F = \widetilde{f}_1$, 所以有如图 7.2.4 所示的交换图.

记 $\varphi = F \circ \varphi_1$, 则图卡 (U, φ) 和 (V, ψ), 使得 f 的局部表示具有以下形式:

$$\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1} \circ F^{-1} = \widetilde{f}_1 \circ F^{-1} = \pi|_{\varphi(U)}. \qquad \square$$

本节最后介绍典范局部表示的两个应用. 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射. 对 $b \in \mathbb{R}^n$, 方程 $f(x) = b$ 的解集 $f^{-1}(b)$ 可能相当复杂. 有必要考察哪些 $b \in \mathbb{R}^n$ 能保证 $f^{-1}(b)$ 成为 C^r 流形?

定义 7.2.5　设 M, N 都是微分流形, $\dim N = n$, 且 $f: M \to N$ 是可微映射.

(1) 如果 $p \in M$ 使得 $\mathrm{rank}_p f < n$, 则称 p 是 f 的*临界点*. f 的全体临界点的集合记为 $C(f)$. 如果 $p \in M$ 使得 $\mathrm{rank}_p f = n$, 则称 p 是 f 的*正则点*.

(2) 如果 $q \in N$ 使得 $f^{-1}(q) \cap C(f) \neq \varnothing$, 则称 q 是 f 的*临界值*. 如果 $f^{-1}(q) \cap C(f) = \varnothing$, 则称 q 是 f 的*正则值*.

显然, f 的全体临界值的集合是 $f(C(f))$, f 的全体正则值的集合是 $N-f(C(f))$.

定理 7.2.2 (正则值原像定理) 设 M, N 分别是 m 维, n 维 C^r 流形, $f: M \to N$ 是 C^r 映射. 如果 $q \in N$ 是 f 的正则值, 且 $f^{-1}(q) \neq \varnothing$, 则 $S = f^{-1}(q)$ 是 M 的 C^r 正则子流形, 且 $\dim S = \dim M - \dim N$.

证明 $\forall\, p_0 \in S$, f 在 p_0 点是淹没. 利用淹没的典范局部表示 (见引理 7.2.2), 分别存在 p_0, q 点的图卡 (U, φ), (V, ψ), 使得

$$f(U) \subset V, \quad \varphi(p_0) = \mathbf{0}, \quad \psi(q) = \mathbf{0}, \quad \widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi''|_{\varphi(U)},$$

其中 $\pi'' : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是投影映射. 因为 $f^{-1} = \varphi^{-1} \circ \widetilde{f}^{-1} \circ \psi$, 所以

$$\varphi(U \cap f^{-1}(q)) = \varphi(U) \cap \widetilde{f}^{-1}(\mathbf{0}) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{m-n} \times \{\mathbf{0}\}).$$

因而, S 是 M 的 $m-n$ 维正则子流形.

显然, 对 $n = m$ 的情形, 结论仍成立. □

例 7.2.1 映射 $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

易验证, f 是光滑映射. Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial f}{\partial(x_0 \cdots x_n)} = (2x_0, \cdots, 2x_n),$$

所以只要 $x \neq \mathbf{0}$, $\mathrm{rank}_x f = 1$. 因而, 任意非零实数 ρ 是 f 的正则值, 并且对 $\rho > 0$, 有 $f^{-1}(\rho) \neq \varnothing$. 于是, 对 $\rho > 0$, $f^{-1}(\rho)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的光滑 n 维正则子流形. 特别地, $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的光滑 n 维正则子流形.

第二个应用讨论把流形嵌入为正则子流形.

定义 7.2.6 设 M, N 都是 C^r 流形. 如果 $f: M \to N$ 是 C^r 浸入, 且 $f: M \to f(M)$ 是同胚, 则称 $f: M \to N$ 是 *C^r 嵌入*. C^∞ 嵌入也称为*光滑嵌入*.

定理 7.2.3 设 M, N 都是 C^r 流形. 若 $h: M \to N$ 是 C^r 嵌入, 则 $h(M)$ 是 N 的 C^r 正则子流形, 并且 $h: M \to h(M)$ 是 C^r 同胚.

证明 设 $\dim M = m$, $\dim N = n$. $\forall\, p \in M$, 令 $q = h(p) \in h(M) = M'$. 因为 $h: M \to N$ 是浸入映射, 由浸入的典范局部表示 (见引理 7.2.1), 分别存在 p, q 点的图卡 (U, φ), (W, ψ), 使得

$$h(U) \subset W, \quad \varphi(p) = \mathbf{0}, \quad \psi(q) = \mathbf{0}, \quad \psi \circ h \circ \varphi^{-1} = j|_{\varphi(U)},$$

其中 $j: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ 是放入映射. 即 $\forall\, p' \in U$ 有 $\psi \circ h(p') = (\varphi(p'), \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, 因而 $\psi(h(U)) = \varphi(U) \times \{\mathbf{0}\}$.

因为 $h: M \to M'$ 是同胚, $h(U)$ 是 M' 中的开集, 存在 N 中的开集 Q, 使得 $h(U) = Q \cap M'$. 于是 $q = h(p) \in h(U) \subset W \cap Q$. 注意到,

(1) $\varphi(U)$ 是 $\mathbf{0}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的开邻域;

(2) $\psi(W\cap Q)$ 是 $\psi(h(p))=\mathbf{0}$ 在 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}$ 中的开邻域.

因而, 存在 $\mathbb{R}^m$ 中 $\mathbf{0}$ 的开邻域 G, $\mathbb{R}^{n-m}$ 中 $\mathbf{0}$ 的开邻域 H, 使得

$$G\subset\varphi(U),\quad G\times H\subset\psi(W\cap Q).$$

如图 7.2.5, 取 $V=\psi^{-1}(G\times H)\subset W\cap Q$, 则 V 是 $q=h(p)$ 在 N 中的开邻域, 并且

$$\begin{aligned}\psi(V\cap M')&=\psi(V\cap Q\cap M')=\psi(\psi^{-1}(G\times H)\cap h(U))\\&=(G\times H)\cap(\varphi(U)\times\{\mathbf{0}\})=G\times\{\mathbf{0}\}\\&=(G\times H)\cap(\mathbb{R}^m\times\{\mathbf{0}\})=\psi(V)\cap(\mathbb{R}^m\times\{\mathbf{0}\}).\end{aligned}$$

这表明 M' 是 N 的正则子流形.

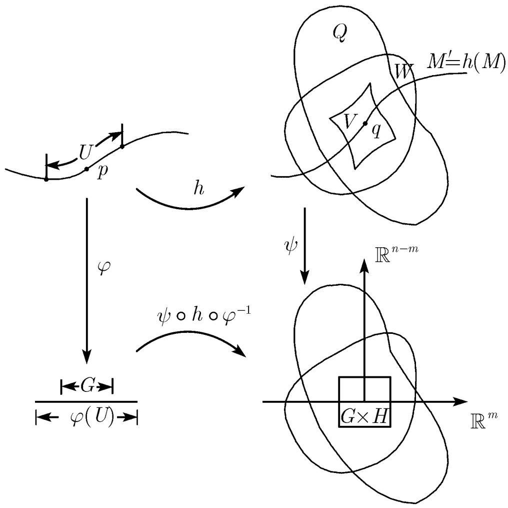


图 7.2.5

对 $p\in M$, 如前所述, 存在 p 点邻近的局部表示

$$\widetilde{h}=\psi\circ h\circ\varphi^{-1}=j|_{\varphi(U)},$$

由于 $\widetilde{h}:\varphi(U)\to\varphi(U)\times\{0\}$ 是 C^r 同胚, 于是 $h:U\to h(U)$ 是 C^r 同胚. 故 h 是局部 C^r 同胚的. 因为 $h:U\to h(U)$ 既是同胚又是局部 C^r 同胚, 所以它是 C^r 同胚. □

习　题　7.2

7.2.1　以下集合具有 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑. 试问: 能否赋予这些拓扑空间以微分结构而使它们成为微分流形?

(1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=0\}$;

(2) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|=1\}$;

(3) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y=\sin(1/x)\}$;

(4) $D=C\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0,\ |y|<1\}$.

7.2.2 设 M 是 n 维 C^r 流形, $p\in U$ 且 U 是 M 的开集. 证明: 存在 M 的图卡 (V,ψ), 满足 $p\in V\subset U$, $\psi(p)=\mathbf{0}$ 且 $\psi(V)=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|<1\}$.

7.2.3 证明: 环面 $\mathbb{T}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ 是二维 C^∞ 流形.

7.2.4 将 n 维球面 $\mathbb{S}^n$ 的每一对对径点 $\{x,-x\}$ 黏成一点所得的商空间称为 n 维射影空间, 记为 P^n. 证明: P^n 是 n 维 C^∞ 流形.

7.2.5 设 M,N,L 都是 C^r 流形. 若 $f:M\to N$, $g:N\to L$ 都是 C^r 映射, 则 $g\circ f:M\to L$ 是 C^r 映射.

7.2.6 设 M 是紧的微分流形, N 是连通的微分流形. 若 $f:M\to N$ 是淹没映射, 试证 $f(M)=N$.

7.2.7 (唱片引理) 设 M, N 都是 C^r 流形, $f:M\to N$ 是 C^r 映射, 且 $\dim M=\dim N$. 如果 M 是紧的, $q\in N$ 是 f 的正则值, 且 $f^{-1}(q)\neq\varnothing$, 证明:

(1) $f^{-1}(q)$ 是有限集 $\{p_i\}_{i\leqslant k}$;

(2) 存在 q 在 N 中的开邻域 V, 使得 $f^{-1}(V)=\bigcup\limits_{i\leqslant k}U_i$, 其中 $\{U_i\}_{i\leqslant k}$ 是 $\{p_i\}_{i\leqslant k}$ 在 M 中的互不相交的开扩张, 并且每个 $f|_{U_i}:U_i\to V$ 是 C^r 同胚.

7.3 紧流形嵌入欧氏空间

由定义, 流形是局部紧、局部连通的拓扑空间. 由于本章主要讨论流形嵌入欧氏空间, 以下均设流形满足第二可数性公理, 从而流形是可分的度量空间.

引理 7.3.1 若 X 是第二可数的局部紧的 T_2 空间, 则存在 X 的可数的开覆盖 $\{G_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 满足: 每个 $\overline{G}_i$ 是紧的且 $\overline{G}_i\subset G_{i+1}$.

证明 由 X 的局部紧性及第二可数性, 存在 X 的可数开覆盖 $\mathscr{W}=\{W_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 使得每个 $\overline{W}_i$ 是 X 的紧子集. 归纳构造 G_i 如下.

让 $G_1=W_1$. 假设已定义了 G_i 满足要求. 由于 $\overline{G}_i$ 的紧性, 存在 $\mathscr{W}$ 的有限子集 $\mathscr{W}'$ 覆盖 $\overline{G}_i$, 令 $G_{i+1}=W_{i+1}\cup(\cup\mathscr{W}')$, 则 G_{i+1} 是 X 的开集, $\overline{G}_{i+1}$ 是 X 的紧子集且 $\overline{G}_i\subset G_{i+1}$. 易验证, $\{G_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是满足要求的开覆盖. □

在流形中我们可获得更进一步的结构. 对正实数 ε, 定义

$$B_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|<\varepsilon\}=B(\mathbf{0},\ \varepsilon).$$

定理 7.3.1 若 $\mathscr{Q}$ 是流形 M 的开覆盖, 则存在 M 的图卡集 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 和开覆盖 $\{V_i\},\{W_i\}$, 满足:

(1) 每个 $\overline{U}_i$ 是紧的且 $\overline{W}_i\subset V_i\subset\overline{V}_i\subset U_i$;

(2) $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是 $\mathscr{Q}$ 的局部有限加细;

(3) $\varphi_i(U_i)=B_3,\ \varphi_i(V_i)=B_2,\ \varphi_i(W_i)=B_1$.

证明 存在 M 的开覆盖 $\{G_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ 满足引理 7.3.1 的要求. 记 $G_0=G_{-1}=\varnothing$, 则

$$\overline{G}_j-G_{j-1}\subset G_{j+1}-\overline{G}_{j-2}.$$

若 $p\in\overline{G}_j-G_{j-1}$, 则存在 $Q\in\mathscr{Q}$, 使得 $p\in Q$, 于是有 M 的图卡 (U,φ), 满足 $\varphi(p)=0,\ \varphi(U)=B_3$, 且 $p\in U\subset(G_{j+1}-\overline{G}_{j-2})\cap Q$. 记

$$V=\varphi^{-1}(B_2),\ W=\varphi^{-1}(B_1).$$

由 $\overline{G}_j-G_{j-1}$ 的紧性, 存在有限集 $\{p_{jl}\}_{l\leqslant k_j}$, 使相应的 $\{W_{jl}\}_{l\leqslant k_j}$ 覆盖 $\overline{G}_j-G_{j-1}$. 令

$$\mathscr{W}=\{W_{jl}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\ l\leqslant k_j};\quad \mathscr{U}=\{U_{jl}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\ l\leqslant k_j}.$$

由于 $M=\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}_+}(G_j-G_{j-1})$, 所以 $\mathscr{W}$ 是 M 的开覆盖. 为了完成证明, 只需验证 $\mathscr{U}$ 的局部有限性. 对每个 $p\in M$, 存在 $j\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $p\in G_j$, 则当 $i\geqslant j+2$ 时, $G_j\cap U_{il}\subset G_j-\overline{G}_{i-2}=\varnothing$, 所以 G_j 仅与 $\mathscr{U}$ 中有限个元相交. 因而, $\mathscr{U}$ 是局部有限的. □

为了叙述的方便起见, 上述定理中的族 $\{(U_i,\varphi_i),V_i,W_i\}$ 称为流形 M 关于 $\mathscr{Q}$ 的*标准覆盖族*. 由此, 可建立流形的单位分解定理.

引理 7.3.2 设 M 是 m 维光滑流形. 若 (U,φ) 是 M 的图卡, V, W 都是 M 的开集, 且满足

$$p\in W\subset\overline{W}\subset V\subset\overline{V}\subset U,$$

$$\varphi(p)=\mathbf{0},\quad \varphi(W)=B_1,\quad \varphi(V)=B_2,\quad \varphi(U)=B_3,$$

则存在 $\eta\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, 具有下述性质：

$$\eta(q)\in\begin{cases}\{1\}, & q\in\overline{W},\\(0,1), & q\in V-\overline{W},\\\{0\}, & q\in M-V.\end{cases}$$

证明 对 $t\in\mathbb{R}$, 让

$$\xi(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}, & t>0,\\0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

由数学分析的知识, $\xi\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

对 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, 定义

$$\zeta(x)=\frac{\xi(4-\|x\|^2)}{\xi(4-\|x\|^2)+\xi(\|x\|^2-1)},$$

则 $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$, 满足 $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$, $\zeta(x)=\zeta(-x)$, 且

$$\zeta(x) \in \begin{cases} \{1\}, & \|x\| \leqslant 1, \\ (0,1), & 1 < \|x\| < 2, \\ \{0\}, & \|x\| \geqslant 2. \end{cases}$$

对 $q \in M$, 置

$$\eta(q) = \begin{cases} \zeta(\varphi(q)), & q \in U, \\ 0, & q \in M-U, \end{cases}$$

则函数 η 具有所要求的性质. □

设 $f: M \to \mathbb{R}$ 是 C^r 映射, 集

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{q \in M : f(q) \neq 0\}}$$

称为 f 的支集. 若 $\mathrm{supp} f$ 是紧集, 则称 f 为紧支映射. 定义于 M 上的全体紧支 C^r 映射的集合记为 $C_c^r(M,\mathbb{R})$.

显然, 引理 7.3.2 中的函数 η 满足：$\mathrm{supp}\ \eta \subset \overline{V}$.

定理 7.3.2 (单位分解定理)　若 $\mathscr{Q}$ 是光滑流形 M 的开覆盖, 则存在映射族 $\{\lambda_i\} \subset C_c^\infty(M,\mathbb{R})$, 满足：

(1) $\{\mathrm{supp}\ \lambda_i\}$ 是 $\mathscr{Q}$ 的局部有限加细;

(2) 每个 $\lambda_i \geqslant 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$.

证明　由定理 7.3.1, M 具有关于 $\mathscr{Q}$ 的标准覆盖族 $\{(U_i,\varphi_i),V_i,W_i\}$. 由引理 7.3.2, 对每个 $i \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $\eta_i \in C_c^\infty(M,\mathbb{R})$, 满足

$$\eta_i(q) \in \begin{cases} \{1\}, & q \in \overline{W}_i, \\ (0,1), & q \in V_i - \overline{W}_i, \\ \{0\}, & q \in M - V_i. \end{cases}$$

因为 M 的覆盖 $\{U_i\}$ 是局部有限的, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i < +\infty$. 又因为 $\{W_i\}$ 覆盖 M, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i \geqslant 1$. 定义

$$\lambda_i = \eta_i \Big/ \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j, \quad i \in \mathbb{Z}_+,$$

则 $\{\lambda_i\}$ 满足所要求的条件. □

上述 $\{\lambda_i\}$ 称为从属于覆盖 $\mathscr{Q}$ 的单位分解.

推论 7.3.1 设 M 是光滑流形, F, G 分别是 M 的非空闭集和开集. 如果 $F \subset G$, 则存在 $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, 使得

$$F \subset \{p \in M : g(p) = 1\} \subset \operatorname{supp} g \subset G.$$

若 F 还是紧集, 则可要求 $g \in C_c^\infty(M,\mathbb{R})$.

证明 令 $\mathscr{Q} = \{G,\ M - F\}$, 那么存在从属于 $\mathscr{Q}$ 的单位分解 $\{\lambda_i\}$. 定义

$$g = \sum \{\lambda_i : \operatorname{supp} \lambda_i \subset G\},$$

则 $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, 且有

$$F \subset \{p \in M : g(p) = 1\} \subset \operatorname{supp} g \subset G.$$

若 F 是紧的, 由于 M 是局部紧的, 则存在 M 的开集 G_0, 使 $\overline{G}_0$ 是紧的且 $F \subset G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G$. 以 G_0 代替 G, 重复上面的过程, 可以得到函数 $g_0 \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, 满足

$$F \subset \{p \in M : g_0(p) = 1\} \subset \operatorname{supp} g_0 \subset G_0 \subset G.$$

因而, $g_0 \in C_c^\infty(M,\mathbb{R})$. □

推论 7.3.2 设 $\{K_i\}$, $\{G_i\}$ 分别是光滑流形 M 的由紧集组成的覆盖和局部有限的开覆盖. 如果每个 $K_i \subset G_i$, 则存在映射族 $\{\lambda_i\} \subset C_c^\infty(M,\mathbb{R})$, 满足:

(1) 每个 $K_i \subset \operatorname{supp} \lambda_i \subset G_i$;

(2) 每个 $\lambda_i \geqslant 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i \equiv 1$.

证明 由推论 7.3.1, 对每个 $i \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $\mu_i \in C_c^\infty(M,\mathbb{R})$, 使得

$$K_i \subset \{p \in M : \mu_i(p) = 1\} \subset \operatorname{supp} \mu_i \subset G_i.$$

这时, $1 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j < +\infty$. 定义 $\lambda_i = \mu_i / \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j$, 则 $\{\lambda_i\}$ 满足全部要求. □

定理 7.3.3 若 M 是紧的光滑流形, 则存在光滑嵌入 $f : M \to \mathbb{R}^l$, 其中 l 是某一正整数.

证明 $\forall\, p \in M$, 存在 p 点的图卡 (U,φ), 使得 $\varphi(p) = \mathbf{0}$, $\varphi(U) = B_3$. 记 $V = \varphi^{-1}(B_2)$, $W = \varphi^{-1}(B_1)$. 由 M 的紧性, 可选择有限个这样的图卡 (U_i,φ_i), $i \leqslant k$, 及相应的 M 的覆盖 $\{W_i\}_{i \leqslant k}$. 对每个 $i \leqslant k$, 由引理 7.3.2, 存在 $\eta_i \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, 满足

$$\eta_i(q) \in \begin{cases} \{1\}, & q \in \overline{W}_i, \\ (0,1), & q \in V_i - \overline{W}_i, \\ \{0\}, & q \in M - V_i. \end{cases}$$

设 $\dim M = m$. 取 $l = k(m+1)$, 定义函数 $f : M \to \mathbb{R}^l$ 为

$$f(q) = (\eta_1(q)\varphi_1(q), \cdots, \eta_k(q)\varphi_k(q), \eta_1(q), \cdots, \eta_k(q)),$$

其中当 $q \in M - V_i$ 时, 规定 $\eta_i(q)\varphi_i(q) = \mathbf{0}$. 则 f 是光滑映射.

(1) $\forall\, p \in M$, f 在 p 点是浸入. 存在 $i \leqslant k$ 使 $p \in W_i$. 在 W_i 上, $\eta_i\varphi_i \equiv \varphi_i$. 因而 f 的局部表示 $\widetilde{f} = f \circ \varphi_i^{-1}$ 形如

$$\widetilde{f}(x_1, \cdots, x_m) = (***, x_1, \cdots, x_m, ***),$$

所以 $\mathrm{rank}_p f \geqslant m$. 从而, f 在 p 点是浸入.

(2) f 是单射. 设 q, $q' \in M$, 使得 $f(q) = f(q')$, 那么 $\eta_i(q) = \eta_i(q')$, $\forall\, i \leqslant k$. 设 $q \in W_j$, 则 $\eta_j(q) = 1$, 因而 $\eta_j(q') = 1$, 所以 $q' \in \overline{W}_j$. 在 $\overline{W}_j$ 上, 考察 f 的分量, 得

$$\eta_j(q')\varphi_j(q') = \eta_j(q)\varphi_j(q), \quad \varphi_j(q') = \varphi_j(q).$$

但在 $V_j \supset \overline{W}_j$ 上, φ_j 是同胚, 所以 $q' = q$.

以上说明, $f : M \to \mathbb{R}^l$ 是单的光滑浸入. 再由 M 的紧性, $f : M \to f(M)$ 是同胚. □

在定理 7.5.3 中, 我们将会看到, 取 $l = 2\dim M + 1$ 就足够了.

习 题 7.3

7.3.1 设 M 是光滑流形, A, B 是 M 的两个不相交的非空闭子集. 证明：存在 $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, 使得 $\varphi(M) \subset [0, 1]$, $\varphi(A) = \{0\}$, 且 $\varphi(B) = \{1\}$.

7.3.2 给出 $\mathbb{S}^1$ 的由两个图卡组成的图汇, 将 $\mathbb{S}^1$ 光滑嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中.

7.3.3 设 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 是光滑流形 M 的图汇, 其中 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 是 M 的局部有限的开覆盖. 若对每个 $i \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $\eta_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, 使得 $\mathrm{supp}\ \eta_i \subset U_i$. 定义 $\eta : M \to \mathbb{R}$ 为 $\eta(p) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \eta_i(p)$. 证明：$\eta$ 是光滑函数.

7.3.4 设 $\{K_i\}$, $\{V_i\}$ 分别是光滑流形 M 的由紧集组成的覆盖和局部有限的开覆盖. 如果每个 $K_i \subset G_i$, 则对任意给定的正实数列 $\{\varepsilon_i\}$, 存在光滑函数 $\varepsilon : M \to \mathbb{R}$, 适合条件：$0 < \varepsilon(p) \leqslant \varepsilon_i$, $\forall\, p \in K_i$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

7.3.5 设 U 是 C^∞ 流形 M 中的开子集, $h \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $p \in U$, $h(p) \neq 0$. 证明：必有 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ 和 M 的开集 V 使得 $p \in V \subset \mathrm{supp} f \subset U$, 且 $f|_V = h|_V$.

7.3.6 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集. 试证存在 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 适合条件：

(1) $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$;

(2) $f^{-1}(0) = F$.

7.4 Sard 定 理

本节是为了证明 Whitney 定理而准备的. Sard 定理用于描述流形中的一些零测集. 在介绍流形的零测集前, 先回忆 $\mathbb{R}^m$ 中零测集的概念.

对 $i = 1, 2, \cdots, m$, 设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$. $I = \prod\limits_{i \leqslant m} (a_i, b_i)$ 称为 m 维**开长方体**, 其体积 $|I| = \prod\limits_{i \leqslant m} (b_i - a_i)$. $\overline{I} = \prod\limits_{i \leqslant m} [a_i, b_i]$ 称为 m 维**闭长方体**, 其体积 $|\overline{I}| = |I|$.

定义 7.4.1 设 $E \subset \mathbb{R}^m$. E 称为 $\mathbb{R}^m$ 的**零测集**, 若 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在至多可数个 m 维开长方体 $\{I_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, 使得 $E \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}_+} I_i$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$.

对 $\mathbb{R}^m$ 中的任一开长方体 I, 先从其最短边的覆盖开始考虑, 可以证明 I 可被体积之和不超过 $2^m|I|$ 的一些开正方体所覆盖 (见习题 7.4.1). 因而上述定义中的 “开长方体” 可换为 “开正方体”.

显然, 零测集的子集仍是零测集, 可数个零测集之并仍是零测集. 下面介绍零测集的局部性质和 C^1 映像性质.

引理 7.4.1 $\mathbb{R}^m$ 的子集 E 是零测集的充分且必要条件是 $\forall\, x \in E$, 存在 x 的开邻域 V_x, 使 $E \cap V_x$ 是零测集.

证明 只需证明充分性. 记 $\mathscr{V} = \{V_x : x \in E\}$. 由 E 的第二可数性, 存在 $\mathscr{V}$ 的可数子族 $\{V_{x_i}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 覆盖 E. 从而, $E = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}_+} (E \cap V_{x_i})$ 是零测集. □

引理 7.4.2 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的非空开集, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. 若 U 的子集 E 是零测集, 则 $f(E)$ 也是零测集.

证明 由正则性及 Lindelöf 性质, U 可表示为可数个闭长方体之并集, 即 $U = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}_+} \overline{I}_i$. 记 $E_i = E \cap \overline{I}_i$, 则 $E = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}_+} E_i$. 由于 f 在 $\overline{I}_i$ 上满足 Lipschitz 条件, 即存在非负实数 L_i, 使得对每个 x, $y \in \overline{I}_i$ 有 $|f(x) - f(y)| \leqslant L_i |x - y|$, 所以 $f(E_i)$ 是零测集. 因而, $f(E) = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}_+} f(E_i)$ 也是零测集. □

引理 7.4.3 如果 $I = [a, b]$ 被一族长度都不超过 δ 的开区间集 $\mathscr{J}$ 所覆盖, 则存在 $\mathscr{J}$ 中覆盖 I 的有限个开区间 $\{J_i\}_{i \leqslant k}$, 满足 $\sum\limits_{i \leqslant k} |J_i| \leqslant 2(|I| + \delta)$.

证明 不妨设 $\mathscr{J}$ 由有限个开区间组成. 由于有公共点的三个开区间中, 必有其中两个区间覆盖了第三个区间, 于是再不妨设 I 中任一点至多属于 $\mathscr{J}$ 中两个开区间, 而且端点 a, b 各自只属于 $\mathscr{J}$ 中的一个开区间. 这些开区间记为 J_i, $i \leqslant k$. 易证, $I \subset \bigcup\limits_{i \leqslant k} I_i$ 且 $\sum\limits_{i \leqslant k} |J_i| \leqslant 2(|I| + \delta)$. □

设 $K \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. 记 $K_t = K \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$, 称 K_t 为 K 的**截集**.

引理 7.4.4 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $t \in \mathbb{R}$. 如果截集 K_t 包含在 $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 的开集 $\{t\} \times W_t$ 中, 那么存在实数 $\alpha > 0$, 使得

$$K \cap ((t - \alpha, t + \alpha) \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset (t - \alpha, t + \alpha) \times W_t.$$

证明 定义 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = |x_1 - t|$, $\forall\, x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则 f 连

续. 令

$$\alpha = \inf\{f(x) : x \in K - (\mathbb{R} \times W_t)\}.$$

则 $\alpha > 0$, 且 $K \cap ((t-\alpha, t+\alpha) \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset (t-\alpha, t+\alpha) \times W_t$. □

拓扑空间 X 的子集 K 称为 σ 紧的, 若 K 是 X 的可数个紧子集之并.

引理 7.4.5 (Fubini 定理) 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是 σ 紧集. 若 K 的每一截集 K_t 是 $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 的零测集, 那么 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的零测集.

证明 不妨设 K 是紧集, 则存在闭区间 $I \subset \mathbb{R}$, 使得 $K \subset I \times \mathbb{R}^{n-1}$. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, t \in I$, 由于 K_t 是 $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测集, 存在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的有限个开正方体之并集 W_t, 使得 $K_t \subset \{t\} \times W_t$, 且 W_t 中各正方体体积之并 $|W_t| < \varepsilon$. 由引理 7.4.4, 存在开区间 $J_t = (t-\alpha_t, t+\alpha_t)$, $\alpha_t \in (0,1)$, 使得 $K \cap (J_t \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset J_t \times W_t$. 再由引理 7.4.3, 从 $\{J_t\}_{t \in I}$ 中可选择有限个 J_{t_i}, 使得 $I \subset \bigcup\limits_{i \leqslant k} J_{t_i}$, 且 $\sum\limits_{i \leqslant k} |J_{t_i}| \leqslant 2(|I|+2)$. 于是

$$K = K \cap (I \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset \bigcup_{i \leqslant k} (K \cap (J_{t_i} \times \mathbb{R}^{n-1})) \subset \bigcup_{i \leqslant k} (J_{t_i} \times W_{t_i}).$$

因为

$$\sum_{i \leqslant k} |J_{t_i} \times W_{t_i}| = \sum_{i \leqslant k} |J_{t_i}| \times |W_{t_i}| < 2\varepsilon(|I|+2),$$

所以 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集. □

本节第二部分介绍流形的零测集.

定义 7.4.2 设 M 是 m 维微分流形. $E \subset M$ 称为零测集, 若对 M 的任一图卡 (U, φ), $\varphi(U \cap E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集.

显然, 零测集的子集仍是零测集, 可数个零测集的并集仍是零测集.

引理 7.4.6 设 M 是 m 维微分流形. 若 $E \subset M$ 满足 $\forall\, p \in E$, 存在 p 点的图卡 (V, ψ), 使得 $\psi(V \cap E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集, 则 E 是 M 中的零测集.

证明 $\forall\, p \in E$, 存在 p 点的图卡 (V_p, ψ_p), 使得 $\psi_p(V_p \cap E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集. 记 $\mathscr{V} = \{V_p : p \in E\}$, $W = \cup \mathscr{V}$. 由 W 的第二可数性, 存在 $\mathscr{V}$ 的可数子族 $\mathscr{V}' = \{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 覆盖 W. 对 M 的任一图卡 (U, φ),

$$\varphi(U \cap E) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} \varphi(U \cap V_i \cap E) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} \varphi \circ \psi_i^{-1}(\psi_i(U \cap V_i \cap E)).$$

由引理 7.4.2, 每个 $\varphi \circ \psi_i^{-1}(\psi_i(U \cap V_i \cap E))$ 是零测集, 所以 $\varphi(U \cap E)$ 是零测集. □

引理 7.4.7 设 M, N 都是 m 维微分流形, $f \in C^1(M, N)$. 如果 $E \subset M$ 是零测集, 那么 $f(E) \subset N$ 也是零测集.

证明　取 M 的可数个图卡 (U_i, φ_i), 使得 $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 覆盖 M. 对每个 $i \in \mathbb{Z}_+$, 记 $E_i = U_i \cap E$, 只需证 $f(E_i)$ 是 N 中的零测集. $\forall\, q \in N$ 和 q 点的任一图卡 (V, ψ). 记 $W_i = f^{-1}(V) \cap U_i$, 则

$$\begin{aligned}\psi(V \cap f(E_i)) &= \psi \circ f(f^{-1}(V) \cap E_i)\\ &= \psi \circ f(f^{-1}(V) \cap U_i \cap E)\\ &= \psi \circ f(W_i \cap E)\\ &= \psi \circ f \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(W_i \cap E)).\end{aligned}$$

由引理 7.4.2, $\psi(V \cap f(E_i))$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集, 所以 $f(E_i)$ 是 N 中的零测集.　□

回忆 7.2 节中定义的临界值和正则值的概念.

引理 7.4.8　设 V, W 和 N 都是微分流形, $f: V \to N$ 是可微映射, $h: V \to W$ 是微分同胚. 记 $g = f \circ h^{-1}$, 则

(1) $x \in C(f) \Leftrightarrow h(x) \in C(g)$;

(2) $f(C(f)) = g(C(g))$.

证明　利用局部表示, $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}, \widetilde{g} = \psi \circ g \circ \chi^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ h^{-1} \circ \chi^{-1})$. 设 $x \in V$. 因为 $\mathrm{rank}_x h = \dim V = \dim W$, 所以 $\mathrm{rank}_{h(x)} g = \mathrm{rank}_x f$.　□

定理 7.4.1 (Sard 定理, 1942)　设 M, N 都是光滑流形. 如果 $f: M \to N$ 是光滑映射, 则 $f(C(f))$ 是 N 中的零测集. 因而, N 中几乎所有点是 f 的正则值.

证明　设 $\dim M = m$, $\dim N = n$. 如果 $m < n$, 则定义乘积流形 $L = M \times \mathbb{R}^{n-m}$ 和映射

$$F: L = M \times \mathbb{R}^{n-m} \to N,\ (p, \xi) \mapsto f(p).$$

显然, $\dim L = n$. 因为 $M \times \{\mathbf{0}\}$ 是 L 中的零测集, 并且 $F \in C^1(L, N)$, 所以 $F(M \times \{\mathbf{0}\}) = f(M)$ 是 N 中的零测集, 因此 $f(C(f))$ 是 N 中的零测集. 下面对 M 的维数 m 作归纳, 完成定理的证明. 由 M 的第二可数性及引理 7.4.8, 不妨设 $M = U$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $N = \mathbb{R}^n$.

记 $C = C(f)$, 以 C_j 表示 U 中使 f 的不超过 j 阶的所有偏导数都取 0 值的那些点 x 的集合. 显然, 对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k,$$

$$f(C) = f(C - C_1) \cup f(C_1 - C_2) \cup \cdots \cup f(C_{k-1} - C_k) \cup f(C_k).$$

(1) $f(C - C_1)$ 是零测集.

对每个 $a \in C - C_1$, 不妨设 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \neq 0$. 定义

$$h(x_1, \cdots, x_m) = (f_1(x), x_2, \cdots, x_m),$$

则 $\mathrm{D}h(a)$ 非退化, 所以存在 a 在 $\mathbb{R}^m$ 中的开邻域 V 和 $h(a)$ 的开邻域 W, 使得 $h|_V : V \to W$ 是光滑同胚. 再定义 $g = f \circ h^{-1} : W \to \mathbb{R}^n$. 因为 $C - C_1$ 可以用可数个这样的 V 覆盖, 只需证明 $g(h(C \cap V))$ 是零测集.

首先, 由于 $C \cap V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 所以 $C \cap V$ 是 σ 紧的, 从而 $g(h(C \cap V))$ 也是 σ 紧的.

其次, 借助交换图 (图 7.4.1), 易见

$$g(z_1, \cdots, z_m) = (z_1, g_2(z), \cdots, g_n(z)) \text{ 或 } g(t, \xi) = (t, g_2(t, \xi), \cdots, g_n(t, \xi)),$$

其中 $\xi = (z_2, \cdots, z_m)$. 对 $t \in \mathbb{R}$, 记 $g^t : W \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \to \mathbb{R}^{n-1}$ 为

$$g^t(\xi) = (g_2(t, \xi), \cdots, g_n(t, \xi)).$$

则

$$\mathrm{D}g(t, \xi) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ * & \mathrm{D}g^t(\xi) \end{pmatrix}.$$

对 $E = h(C \cap V) \subset W$, 截集 $g(E)_t = g(E_t) \subset \{t\} \times g^t(C(g^t))$. 由归纳假设, $g^t(C(g^t))$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测集, 因而 $g(E)_t$ 是 $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测集. 由引理 7.4.5, $g(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集. 即, $f(C \cap V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集. (1) 得证.

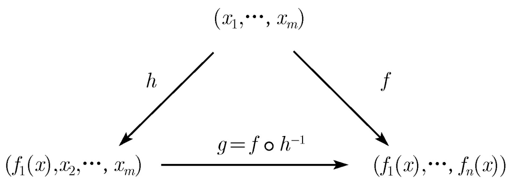


图 7.4.1

(2) 对 $j = 2, 3, \cdots, k$, $f(C_{j-1} - C_j)$ 是零测集.

对每个 $a \in C_{j-1} - C_j$, 不妨设

$$\frac{\partial^j f_1}{\partial x_1 \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}}(a) \neq 0.$$

记

$$\eta(x) = \frac{\partial^{j-1} f_1}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}}(x),$$

则

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1}(a) \neq 0, \quad \eta(x) = 0, \quad \forall\, x \in C_{j-1} - C_j.$$

定义 $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 为 $h(x_1, \cdots, x_m) = (\eta(x), x_2, \cdots, x_m)$, 则 $\mathrm{D}h(a)$ 非退化, 从而存在 a 在 $\mathbb{R}^m$ 中的开邻域 V 和 $h(a)$ 的开邻域 W, 使得 $h|_V : V \to W$ 是光滑同胚. 仍记 $g = f \circ h^{-1}$, 再记 $g^0 : W \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \to \mathbb{R}^n$ 为 $g^0(\xi) = g(0, \xi)$. 由归纳假设, $g^0(C(g^0))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集. 因为

$$h((C_{j-1}-C_j)\cap V)\subset W\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^{m-1}),$$

$$f((C_{j-1}-C_j)\cap V)=g(h((C_{j-1}-C_j)\cap V))\subset g^0(C(g^0)),$$

从而 $f((C_{j-1}-C_j)\cap V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集. (2) 得证.

(3) 若 $k+1>m/n$, 则 $f(C_k)$ 是零测集.

只需证明：对任意的一个 m 维闭正方体 $P\subset U$, $f(P\cap C_k)$ 是零测集. 由 Taylor 定理, P 的紧性及 C_k 的定义, 存在实数 $b>0$, 使得对每个 $x\in C_k\cap P$ 和 $x+h\in P$, 有 $f(x+h)=f(x)+R(x,h)$, 其中 $\|R(x,h)\|\leqslant b\|h\|^{k+1}$. 设 P 的边长为 λ, 重分 P 为边长 λ/l 的 l^m 个 m 维闭正方体. 设 Q 是重分中的一个闭正方体且存在 $x\in C_k\cap Q$, 则 Q 中任一点能写作 $x+h$, 其中 $\|h\|\leqslant\sqrt{m}\lambda/l$, 于是 $f(Q)$ 在一个以 $f(x)$ 为中心, 边长为 $2b(\sqrt{m}\lambda/l)^{k+1}=a/l^{k+1}$ 的正方体中, 其中 $a=2b(\sqrt{m}\lambda)^{k+1}$, 因而 $f(C_k\cap P)$ 包含在至多 l^m 个小正方体之并中. 这些正方体的总体积 $S\leqslant l^m(a/l^{k+1})^n=a^nl^{m-(k+1)n}$. 因为 $k+1>m/n$, 对 $\varepsilon>0$, 总可以选取足够大的 l, 使得 $S<\varepsilon$. (3) 得证.

综上所述, 定理得证. □

利用 Sard 定理和 Weierstrass 逼近定理, 可以证明高维的 Brouwer 不动点定理.

推论 7.4.1 设 M, N 都是微分流形, $\dim M<\dim N$. 如果 $f\in C^1(M,N)$, 则 $f(M)$ 是 N 中的零测集.

习 题 7.4

7.4.1 设 I 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开长方体. 证明：I 可被体积之和不超过 $2^m|I|$ 的一些开正方体所覆盖.

7.4.2 设 M, N 都是微分流形, $q\in N$. 证明：$M\times\{q\}$ 是乘积流形 $M\times N$ 中的零测集.

7.4.3 设 M 是连通的光滑流形. 如果 $f\in C^r(M,\mathbb{R})$ 适合条件 $C(f)=M$, 那么 f 是常值函数.

7.4.4 试举出反例说明：$f\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $q\in\mathbb{R}$, 但是集合 $f^{-1}(q)$ 可以不是 $\mathbb{R}^2$ 的正则子流形.

7.4.5 试举出反例说明：$f\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $q\in f(C(f))$, 但是 $f^{-1}(q)$ 却是 $\mathbb{R}^2$ 的正则子流形.

7.4.6 试举出反例说明：$f\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ 并且 $f(C(f))$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

7.5 Whitney 定理

本节介绍 H. Whitney (美, 1907~1989) 在 1935 年完成的一项开创性研究, 他明确提出, 微分流形在欧氏空间里的 “实现” 有两种途径, 一种是 “浸入”, 另一种是

“嵌入”.

由全体 $n\times m$ 矩阵组成的集合 $M(n,m)$, 可等同于 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 赋予欧氏拓扑的空间. 考察空间 $M(n,m)$ 中由全体秩为 k 的矩阵组成的子空间 $M(n,m;k)$.

例 7.5.1 空间 $M(n,m)$ 的子空间 $M(n,m;k)$ 是 $nm-(n-k)(m-k)$ 维的光滑流形.

证明 在 $M(n,m;k)$ 上定义图卡. 左上角的 $k\times k$ 子阵非退化的全体 $n\times m$ 矩阵组成 $M(n,m)$ 的开集 G_0. 记 $U_0=G_0\cap M(n,m;k)$, 则 $\forall\ X\in U_0$ 可写成

$$X=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix},\ \text{其中 } A \text{ 是 } k\times k \text{ 满秩方阵.}$$

让

$$L=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0}\\ -CA^{-1} & \boldsymbol{I}_{n-k}\end{pmatrix},$$

则

$$LX=\begin{pmatrix} A & B\\ \boldsymbol{0} & D-CA^{-1}B\end{pmatrix},$$

所以 $D=CA^{-1}B$, 因而在 X 的各子块中, 只有 A,B,C 三个子块是独立的. 从而可以选取 A, B, C 子块的分量, 共 $nm-(n-k)(m-k)$ 个, 来确定 U_0 中矩阵的局部坐标, 即定义

$$\varphi_0\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ C & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

则 (U_0,φ_0) 是 $M(n,m;k)$ 的图卡.

对一般的 $X_1\in M(n,m;k)$, 分别存在 n 阶, m 阶可逆矩阵 P_1, Q_1, 使得 $P_1X_1Q_1\in U_0$. 在 $M(n,m;k)$ 中的开集 $U_1=P_1^{-1}U_0Q_1^{-1}$ 上, 定义局部坐标

$$\varphi_1(X_1)=\varphi_0(P_1X_1Q_1),$$

于是 (U_1,φ_1) 是 $M(n,m;k)$ 的图卡. $M(n,m;k)$ 为有限个开集 $U_0,U_1,\cdots,U_{l-1}$ 所覆盖, 其中 $l=\mathrm{C}_n^k\cdot\mathrm{C}_m^k$. 在每个 U_i 上, 定义局部坐标 $\varphi_i(X)=\varphi_0(P_iXQ_i)$. 如果 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, 那么 φ_i 与 φ_j 之间的坐标变换

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}\begin{pmatrix} A & B\\ C & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\varphi_0\left[P_jP_i^{-1}\begin{pmatrix} A & B\\ C & CA^{-1}B\end{pmatrix}Q_i^{-1}Q_j\right]$$

是光滑映射. □

引理 7.5.1 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的开集, $f\in C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$. 如果 $n\geqslant 2m$, 则 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_{ij})$, 满足:

(1) $|A| = \max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\} < \varepsilon$;

(2) $g(x) = f(x) + Ax$ 在 U 上是浸入.

证明 对 $A \in M(n,m)$, 让 $g(x) = f(x) + Ax$, $\forall\ x \in U$, 则 $\mathrm{D}g(x) = \mathrm{D}f(x) + A$. 要使 g 为浸入, 应选择 A, 使得 $\forall\ x \in U$, 有 $\mathrm{rank}_x g = m$, 即 $\mathrm{rank}\mathrm{D}g(x) = \mathrm{rank}(\mathrm{D}f(x) + A) \geqslant m$, 换言之,

$$\mathrm{D}f(x) + A \notin M(n,m;k), \quad \forall\ k \in \{0,1,\cdots,m-1\}.$$

对 $k < m$, 让

$$\psi_k : M(n,m;k) \times U \to M(n,m), (B,x) \mapsto B - \mathrm{D}f(x).$$

因为 $n \geqslant 2m$, 于是

$$\begin{aligned} nm-(n-k)(m-k)+m &\leqslant nm-[n-(m-1)][m-(m-1)]+m \\ &= nm-(n-2m)-1 \leqslant nm-1, \end{aligned}$$
$$\dim(M(n,m;k)\times U) < \dim M(n,m).$$

由 Sard 定理 (见定理 7.4.1), $\psi_k(M(n,m;k)\times U)$ 是 $M(n,m)$ 中的零测集, 从而存在

$$A = (a_{ij}) \in M(n,m) - \bigcup_{k=0}^{m-1} \psi_k(M(n,m;k)\times U),$$

使得 $|A| < \varepsilon$. 于是 $\forall\ x \in U$, $\forall\ k < m$, 有 $\mathrm{D}f(x) + A \notin M(n,m;k)$. 因此, 映射 $g(x) = f(x) + Ax$ 是 U 上的浸入. □

设 U, K 分别是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集和紧集, $K \subset U$. 对 $f \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, $x = (x_1,\cdots,x_m) \in U$, 表示

$$f(x) = (f_1(x),\cdots,f_n(x)) = (f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_m)).$$

记

$$|f|_K^{(0)} = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sup_{x\in K}\{|f_i(x)|\},$$
$$|f|_K^{(1)} = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{|f|_K^{(0)}, \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_K^{(0)}\right\}.$$

引理 7.5.2 设 U, K 分别是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集和紧集, $K \subset U$. 如果 $f \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ 在 K 上是浸入, 那么存在 $\delta > 0$, 使得对任何 $g \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, 若 $|g-f|_K^{(1)} < \delta$, 则 g 在 K 上是浸入.

证明 对 $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $x \in U$, 定义

$$\Delta(g,x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{i_1}(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{i_1}(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{i_m}(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{i_m}(x)}{\partial x_m} \end{vmatrix}^2 .$$

因为对每个 $x \in K$, 有 $\mathrm{rankD}f(x) = m$, 所以 $\Delta(f,x) > 0$, 于是存在 $\delta > 0$, 使得只要 $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $|g - f|_K^{(1)} < \delta$, 则对所有 $x \in K$, 有 $\Delta(g,x) > 0$. 故 g 在 K 上是浸入. □

引理 7.5.3 设 M 是 m 维光滑流形, $n \geqslant 2m$, 并设

(1) $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ 在闭集 $H \subset M$ 上是浸入;

(2) (U, φ) 是 M 的图卡;

(3) $\varphi(U) = B_3$, $V = \varphi^{-1}(B_2)$, $W = \varphi^{-1}(B_1)$,

则对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, 满足:

(a) $g(p) = f(p)$, $\forall\, p \in M - V$;

(b) g 在 $H \cup \overline{W}$ 上是浸入;

(c) $\|g(p) - f(p)\| < \varepsilon$, $\forall\, p \in M$.

证明 令 $K = H \cap \overline{V} \subset U$ 和 $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}^n)$, 则闭集 $\varphi(K) \subset B_2 \subset \varphi(U)$, 于是 $\varphi(K)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧集. 由引理 7.5.2, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\widetilde{g} \in C^1(\varphi(U), \mathbb{R}^n)$, $|\widetilde{g} - \widetilde{f}|_{\varphi(K)}^{(1)} < \delta$, 就能保证 $\widetilde{g}$ 在 $\varphi(K)$ 上是浸入.

由引理 7.3.2, 选取 $\eta \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, 满足条件

$$\eta(p) \in \begin{cases} \{1\}, & p \in \overline{W}, \\ (0,1), & p \in V - \overline{W}, \\ \{0\}, & p \in M - V. \end{cases}$$

在 $\varphi(U) = B_3$ 上, 对映射 $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ 利用引理 7.5.1, 则存在任意小的 $A \in M(n,m)$, 使得 $\widetilde{f}(x) + Ax$ 在 $\varphi(U) = B_3$ 上是浸入. 在 M 上, 定义 $g(p) = f(p) + \eta(p)A\varphi(p)$, 其中对 $p \in M - V$, 补充定义 $\eta(p)A\varphi(p) = 0$. 那么在 $\varphi(U)$ 上, $\widetilde{g}(x) = g \circ \varphi^{-1}(x) = \widetilde{f}(x) + \eta(\varphi^{-1}(x))Ax$, 所以只要 A 选取充分小, 当然可使 $|\widetilde{g} - \widetilde{f}|_{\varphi(K)}^{(1)} < \delta$. 于是

(a) $g(p) = f(p)$, $\forall\, p \in M - V$;

(b) 在 $K = H \cap \overline{V}$ 上, g 是浸入; 在 $H - \overline{V}$ 上, $g = f$ 是浸入; 在 $\overline{W}$ 上, 由于 $\widetilde{g}(x) = \widetilde{f}(x) + Ax$, 所以 g 是浸入. 从而, g 在 $H \cup \overline{W}$ 上是浸入.

(c) $\|g(p) - f(p)\| = \|\eta(p)A\varphi(p)\| < 3|A|$, 所以只要 A 选择得足够小, 可使 $\|g(p) - f(p)\| < \varepsilon$, $\forall\, p \in M$. □

定理 7.5.1 (Whitney *浸入定理*, 1935) 设 M 是 m 维光滑流形. 如果 $n \geqslant 2m$, 则对每个 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, 使得

(1) g 是浸入映射;

(2) $\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\ \forall\, p\in M$.

证明　由定理 7.3.1, 设 $\{(U_i,\varphi_i),V_i,W_i\}$ 是流形 M 的标准覆盖族. 归纳构造一列映射 $\{f_i\}\subset C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$, 证明其极限函数满足要求. 首先, 记 $V_0=W_0=\varnothing$, $f_{-1}=f_0=f$. 假设对 $j<k$, 已定义了 $f_j\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$, 满足:

(a_j)　$f_j(p)=f_{j-1}(p),\ \forall\, p\in M-V_j$;

(b_j)　f_j 在 $H_j=\bigcup\limits_{i=0}^{j}\overline{W}_i$ 上是浸入;

(c_j)　$\|f_j(p)-f_{j-1}(p)\|<\varepsilon/2^j,\ \forall\, p\in M$.

由引理 7.5.3, 存在 $f_k\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$, 满足相应的 $(a_k),(b_k)$ 和 (c_k). 这完成了映射列 $\{f_i\}$ 的归纳构造.

对每个 $p\in W_{l_0}$, 由 $\overline{W}_{l_0}$ 的紧性及 $\{V_i\}$ 的局部有限性, 存在 $k_0>l_0$, 使当 $k>k_0$ 时有 $V_k\cap\overline{W}_{l_0}=\varnothing$, 从而 $f_k(p)=f_{k+1}(p)$, 故可定义 $g(p)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(p),\ \forall\, p\in M$.

(1) $\forall\, p\in M,\ \exists\, k_0>l_0$, 使当 $p\in W_{l_0}$ 且 $k>k_0$ 时, 有 $g(p)=f_k(p)$. 由 f_k 在 $H_k\supset\overline{W}_{l_0}$ 上是浸入, $g\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ 是浸入映射.

(2) $\forall\, p\in M,\ g(p)=f(p)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_k(p)-f_{k-1}(p))$, 所以

$$\|g(p)-f(p)\|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon.$$ □

由此, 任何 m 维光滑流形 M 都可光滑地浸入到 $2m$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{2m}$ 中. 为了下面讨论流形的嵌入定理, 先证明单浸入定理. 既单又浸入的映射称为**单浸入映射**.

引理 7.5.4　设 G 是 m 维光滑流形 M 的开集, (U,φ) 是 M 的图卡, $W\subset V\subset U$ 且 $\varphi(U)=B_3,\ \varphi(V)=B_2,\ \varphi(W)=B_1$. 又设

(1) $f\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ 限制于 G 上和 U 上都是单射;

(2) $\eta\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ 满足

$$\eta(p)\in\begin{cases}\{1\}, & p\in\overline{W},\\ (0,1), & p\in V-\overline{W},\\ \{0\}, & p\in M-V.\end{cases}$$

如果 $n>2m$ 且 $\varepsilon>0$, 则存在 $b\in\mathbb{R}^n,\ \|b\|<\varepsilon$, 使得如下定义的 $g\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ 在 $G\cup V$ 上是单射, 其中 $g(p)=f(p)+\eta(p)b$.

证明　记 $D=\{(p,q)\in M\times M:\eta(p)\neq\eta(q)\}$, 则 D 是 $M\times M$ 中的开集. 定义映射 $\theta:D\to\mathbb{R}^n$ 为

$$\theta(p,q)=-\frac{f(p)-f(q)}{\eta(p)-\eta(q)}.$$

因为 $n > 2m$, 由 Sard 定理, $\theta(D)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集, 于是存在 $b \in \mathbb{R}^n - \theta(D)$, 使得 $\|b\| < \varepsilon$. 下面验证, g 在 $G \cup V$ 上是单射.

$\forall\, p,\ q \in G \cup V$, 设 $g(p) = g(q)$, 那么 $\eta(p) = \eta(q)$, 否则

$$b = -\frac{f(p) - f(q)}{\eta(p) - \eta(q)} \in \theta(D),$$

矛盾. 从而又有 $f(p) = f(q)$ 且 $p,\ q \in V$ 或 $p,\ q \in G - V$, 于是 $p = q$. □

定理 7.5.2 (Whitney *单浸入定理*) 设 M 是 m 维光滑流形. 若 $n > 2m$, 则对任何浸入映射 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, 使得

(1) g 是单浸入映射;

(2) $\|g(p) - f(p)\| < \varepsilon$, $\forall\, p \in M$.

证明 从浸入的典范局部表示可以看出, $\forall\, q \in M$, 存在 q 点的开邻域 Q, 使得 $f|_Q$ 是单射. 以 $\mathscr{Q}$ 表示所有这样的 Q 组成的集族, 则由定理 7.3.1, 存在 M 关于 $\mathscr{Q}$ 的标准覆盖族 $\{(U_i, \varphi_i), V_i, W_i\}$. 再由引理 7.3.2, 对每个 $i \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $\eta_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ 满足

$$\eta_i(p) \in \begin{cases} \{1\}, & p \in \overline{W}_i, \\ (0,1), & p \in V - \overline{W}_i, \\ \{0\}, & p \in M - V_i. \end{cases}$$

按以下方式归纳构造浸入映射列 $\{f_i\} \subset C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. 首先, 取 $f_0 = f$. 假定已定义了 $f_0, \cdots, f_{k-1}$, 将选取适当的 $b_k \in \mathbb{R}^n$, $\|b_k\| < \varepsilon/2^k$, 使得 $f_k(p) = f_{k-1}(p) + \eta_k(p) b_k$, 满足:

(a) f_k 是浸入映射;

(b) $f_k(p) = f_k(q) \Rightarrow \eta_k(p) = \eta_k(q)$ 且 $f_{k-1}(p) = f_{k-1}(q)$.

由引理 7.5.2, 只要 b_k 选取得充分小, 则 (a) 成立. 定义

$$D_k = \{(p, q) \in M \times M : \eta_k(p) \neq \eta_k(q)\}$$

和映射 $\theta_k : D_k \to \mathbb{R}^n$ 为

$$\theta(p, q) = -\frac{f_{k-1}(p) - f_{k-1}(q)}{\eta_k(p) - \eta_k(q)}.$$

因为 $\dim(M \times M) = 2m < n$, 由 Sard 定理, 则 $\theta_k(D_k)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集. 于是选取充分小的 $b_k \in \mathbb{R}^n - \theta_k(D_k)$, 则 (b) 成立. 事实上, 若存在 $p \in M$, 使得 $f_k(p) = f_k(q)$ 且 $\eta_k(p) \neq \eta_k(q)$, 那么 $(p, q) \in D_k$ 且

$$b_k = -\frac{f_{k-1}(p) - f_{k-1}(q)}{\eta_k(p) - \eta_k(q)},$$

这与 $b_k \notin \theta_k(D_k)$ 矛盾.

与定理 7.5.1 类似的证法, 对 $l_0 \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $k_0 > l_0$, 使得 $\forall\, p \in W_{l_0}$, $k \geqslant k_0$, 有 $f_k(p) = f_{k+1}(p)$, 于是存在 $g(p) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(p)$ 并且 $\forall\, p \in W_{l_0}$, $k \geqslant k_0$ 有 $g(p) = f_k(p)$. 则 $g : M \to \mathbb{R}^n$ 满足要求. 这只需验证 g 是单射.

设 $p,\ q \in M$ 且 $g(p) = g(q)$, 则存在 $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $\forall\, k \geqslant k_0$ 有

$$f_k(p) = g(p) = g(q) = f_k(q),$$

于是 $\eta_k(p) = \eta_k(q)$ 且 $f_{k-1}(p) = f_{k-1}(q)$, 从而 $\eta_{k-1}(p) = \eta_{k-1}(q)$ 且 $f_{k-2}(p) = f_{k-2}(q)$. 以此类推, 得

$$\begin{cases} \eta_j(p) = \eta_j(q), \quad j = 1, 2, \cdots, \\ f(p) = f_0(p) = f_0(q) = f(q). \end{cases}$$

设 $p \in W_i$, 则由 $\eta_i(p) = \eta_i(q) = 1$ 可知 $q \in \overline{W}_i \subset V_i$. 因为 $f|_{V_i}$ 是单射, 且 $p,\ q \in V_i$, $f(p) = f(q)$, 所以 $p = q$. 故 $g : M \to \mathbb{R}^n$ 是单射. □

引入常态映射的概念. 设 X, Y 都是拓扑空间, 映射 $f : X \to Y$ 称为**常态映射**, 若 Y 的每个紧集关于 f 的原像是 X 的紧集.

先讨论常态映射的一些性质.

引理 7.5.5　设 Y 是局部紧的 T_2 空间. 若 $f : X \to Y$ 是常态映射, 则 f 是闭映射; 若 f 还是单射, 则 f 是闭的拓扑嵌入.

证明　设 F 是 X 的闭集. 对每个 $y \in Y - f(F)$, 存在 y 在 Y 中的邻域 W, 使 $\overline{W}$ 是紧的. 由于 $F \cap f^{-1}(\overline{W})$ 是 X 的紧集, 于是 $f(F) \cap \overline{W} = f(F \cap f^{-1}(\overline{W}))$ 是 Y 的紧集, 从而是 Y 的闭集. 因为 $y \notin f(F) \cap \overline{W}$, 存在 y 的邻域 $V \subset W$, 使得 $V \cap (f(F) \cap \overline{W}) = \varnothing$, 那么 $V \cap f(F) = \varnothing$. 故 $f(F)$ 是闭集. 从而 f 是闭映射. □

引理 7.5.6　设 X 是 T_2 空间, $f : X \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射, 且 $p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是投射. 若 $f_1 = p_1 \circ f$ 是常态映射, 则 f 也是常态映射.

证明　设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集, 则 $p_1(K) \subset \mathbb{R}$ 是有界闭集, 于是存在实数 $b > 0$, 使得 $p_1(K) \subset [-b,\ b]$, 那么 $K \subset p_1^{-1}([-b,\ b])$, 所以 $f^{-1}(K) \subset f_1^{-1}([-b,\ b])$ 是紧的. □

引理 7.5.7　若 M 是光滑流形, 则对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 存在光滑常态映射 $f : M \to \mathbb{R}^n$.

证明　由定理 7.3.1, 设 $\{(U_i, \varphi_i), V_i, W_i\}$ 是流形 M 的标准覆盖族. 再由引理 7.3.2, 对每个 $j \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $\eta_j \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, 满足 $\forall\, p \in M$,

$$\eta_j(p) \in \begin{cases} \{1\}, & p \in \overline{W}_j, \\ (0,1), & p \in V_j - \overline{W}_j, \\ \{0\}, & p \in M - V_j. \end{cases}$$

定义 $\alpha: M \to \mathbb{R}$, 使得每个 $\alpha(p) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \eta_j(p)$, 则 $\alpha(p) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. 对 $\mathbb{R}$ 的紧集 K, 存在实数 $b > 0$, 使得 $K \subset [-b,\ b]$, 则 $\alpha^{-1}(K) \subset \alpha^{-1}([-b,\ b]) \subset \bigcup_{j \leqslant b} \overline{W}_j$ 是紧的. 从而, α 是常态映射.

再定义 $f: M \to \mathbb{R}^n$, 满足 $f(q) = (\alpha(q), 0, \cdots, 0)$. 由引理 7.5.6, f 是常态映射. □

引理 7.5.8 设 X 是 T_2 空间, $f: X \to \mathbb{R}^n$ 是常态映射, $g: X \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射. 如果对每个 $p \in X$, $\|g(p) - f(p)\| \leqslant 1$, 那么 g 也是常态映射.

证明 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集, 则存在实数 $b > 0$, 使得 $K \subset \overline{B}_b$. 因为 $\|f(p)\| \leqslant \|g(p)\| + 1$, 所以 $g^{-1}(K) \subset g^{-1}(\overline{B}_b) \subset f^{-1}(\overline{B}_{b+1})$, 因而 $g^{-1}(K)$ 是紧的. 故 g 是常态映射. □

定理 7.5.3 (Whitney **嵌入定理**, 1935) 设 M 是 m 维光滑流形. 若 $n \geqslant 2m+1$, 则存在闭的光滑嵌入映射 $h: M \to \mathbb{R}^n$, 使得 $h(M)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的正则光滑子流形且光滑同胚于流形 M.

证明 由引理 7.5.7, 存在光滑常态映射 $f: M \to \mathbb{R}^n$. 由 Whitney 浸入定理 7.5.1, 存在浸入映射 $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, 使得 $\forall\ p \in M$ 有 $\|g(p) - f(p)\| < 1/2$. 再由 Whitney 单浸入定理 7.5.2, 又存在单浸入 $h \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, 使得 $\forall\ p \in M$ 有 $\|h(p) - g(p)\| < 1/2$, 那么 $\|h(p) - f(p)\| < 1$. 由引理 7.5.8, h 是常态映射, 又由引理 7.5.5, h 是闭的拓扑嵌入. 最后, 利用定理 7.2.3, $h(M)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的正则光滑子流形且光滑同胚于 M. □

推论 7.5.1 任何光滑流形都可度量化.

更进一步, 1944 年, Whitney 发现了 "Whitney 绝招" 的技术, 证明了一个困难的定理 [11]: 设 M 是 n 维的 C^r 流形, 则存在 M 到 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 的 C^r 浸入, 并且存在 M 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 的常态的 C^r 嵌入.

习 题 7.5

7.5.1 利用 Whitney 浸入定理的证明方法, 证明 Whitney 单浸入定理.

7.5.2 设 X, Y 都是度量空间. 若 $f: X \to Y$ 连续, 则 f 是常态映射的充分且必要条件是: 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 使得 $\{f(x_n)\}$ 是 Y 中的收敛序列, 那么 $\{x_n\}$ 必定含有一个收敛的子序列.

7.5.3 试利用 Whitney 嵌入定理证明: 任何光滑流形都可赋予度量使之成为完全的度量空间.

参 考 文 献

[1] Enderton H B. Elements of Set Theory. New York: Academic Press, 1977 (集合论基础 (英文). 北京: 人民邮电出版社, 2006).

[2] Engelking R. General Topology. Revised and Completed Edition. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[3] 熊金城. 点集拓扑讲义. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[4] Steen L A, Seebach Jr J A. Counterexamples in Topology. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1978 (New York: Dover Publications Inc, 1995).

[5] 高国士. 拓扑空间论. 第二版. 北京: 科学出版社, 2008.

[6] 叶向东, 黄文, 邵松. 拓扑动力系统概论. 北京: 科学出版社, 2008.

[7] 张景中, 熊金城. 函数迭代与一维动力系统. 成都: 四川教育出版社, 1992.

[8] 张筑生. 微分动力系统原理. 北京: 科学出版社, 1987.

[9] 林金坤. 拓扑学基础. 第二版. 中国科学院规划教材、南开大学数学教学丛书. 北京: 科学出版社, 2004.

[10] Munkres J R. Topology. Second Edition. New Jersey: Prentice Hall, Pearson Education Asia Pte. Ltd., 2000 (中译本: 拓扑学. 第二版. 熊金城, 吕杰, 谭枫译. 北京: 机械工业出版社, 2006).

[11] 米尔诺. 从微分观点看拓扑. 熊金城译. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.

[12] 张筑生. 微分拓扑新讲. 北京: 北京大学出版社, 2002.

[13] 干丹岩. 代数拓扑和微分拓扑简史. 长沙: 湖南教育出版社, 2005.

[14] 施恩伟. 流形上的微积分. 北京: 科学出版社, 2004.

[15] 王则柯, 左再思, 李志强. 经济学拓扑方法. 北京: 北京大学出版社, 2002.

[16] 张锦炎, 钱敏. 微分动力系统导引. 北京: 北京大学出版社, 1991.

索　　引

R

S

T

U

W

Z

(三)

B

C

Z